Глава 1

Развитие электродинамической теории рассеяния в интересах исследования вторичного излучения радиолокационных целей

Математическое моделирование вторичного излучения воздушных и наземных радиолокационных объектов, требует развития и уточнения некоторых принципов и методов прикладной электродинамики. Это даст возможность получить аппарат, позволяющий исследовать задачи рассеяния электромагнитных волн при таких усложняющих факторах, как наличие радиопоглощающих покрытий в сочетании с разнесенным приемом, импульсное, в частности, сверхширокополосное зондирование, влияние подстилающей поверхности и др.

В этой главе излагаются обобщения таких важных принципов электродинамики как интегральная лемма Лоренца и принцип зеркальных изображений на ситуации, связанные с наличием в пространстве неоднородностей различных типов или полей, отвечающих неодинаковым материальным заполнениям пространства. На основе этих обобщений, представляющих и самостоятельный научный интерес, оказывается возможным получение специальных интегральных уравнений, позволяющих исследовать влияние поглощающих покрытий и других слоистых структур, а также подстилающей поверхности на вторичное излучение радиолокационных целей.

Другой круг вопросов, рассматриваемых в этой главе, дает, в конечном счете, развитие метода стационарной фазы и физической оптики с практическими выходами в задачи радиолокации при нестационарном зондировании и разнесенном приеме.

Кроме того, в этой главе содержатся новые результаты, относящиеся к связи эффективных поверхностей рассеяния трехмерных ЭПР с ЭПР соответствующих двумерных моделей, что представляет несомненный интерес в вычислительном плане.

1.1. Обобщение интегральной леммы Лоренца на случай полей, отвечающих неодинаковым материальным заполнениям области

Эффективным средством исследования и численного решения ряда практически важных задач прикладной электродинамики и радиолокации оказываются интегральные представления, в которых основное и вспомогательное поля могут соответствовать различным и, в общем случае, неоднородным заполнениям некоторых областей пространства, что делает целесообразным при построении таких представлений использование надлежащим образом обобщенной леммы Лоренца.

В данном разделе дано такое обобщение леммы Лоренца [9], с помощью которого, например, могут быть построены и исследованы интегральные представления полей, дающие поправки, которые вносят диэлектрические и радиопоглощающие неоднородности внешней среды в поле, дифрагированное на системе металлических рассеивателей (п. 1.2).

Пусть в области V при ее заполнении изотропной, но неоднородной (вообще говоря) средой с проницаемостями $\varepsilon_1(x)$, $\mu_1(x)$ и при наличии в ней сторонних электрических токов с плотностью $\vec{J}_1^e(x)$ возникает поле $\vec{E}_1(x)$, $\vec{H}_1(x)$, а проницаемостям $\varepsilon_2(x)$, $\mu_2(x)$ и сторонним токам $\vec{J}_2^e(x)$ отвечает (возможно при других граничных условиях) поле $\vec{E}_2(x)$, $\vec{H}_2(x)$. Таким образом, в области V

$$rot\,\vec{E}_\alpha = j\,\omega\mu_\alpha\vec{H}_\alpha,^1$$
$$rot\,\vec{H}_\alpha = -j\,\omega\,\varepsilon_\alpha\vec{E}_\alpha + \vec{J}^e_\alpha,\ \ \alpha = 1,\,2. \tag{1.1}$$

При обычных предположениях о гладкости входящих в (1.1) функций в области V вплоть до ее граничной поверхности L из (1.1) вытекает равенство

$$div\left[-\left(\vec{E}_1\times\mu_2\vec{H}_2\right)+\left(\vec{E}_2\times\mu_1\vec{H}_1\right)\right] = j\omega\left(\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2\right)\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 +$$
$$+\left[\mu_2\vec{J}^e_2+\left(\vec{\nabla}\mu_2\times\vec{H}_2\right)\right]\cdot\vec{E}_1-\left[\mu_1\vec{J}^e_1+\left(\vec{\nabla}\mu_1\times\vec{H}_1\right)\right]\cdot\vec{E}_2. \tag{1.2}$$

Отсюда, в силу теоремы Остроградского-Гаусса [10],

$$\int\limits_L\left[\mu_2\vec{E}^T_1\cdot\vec{H}^\perp_2-\mu_1\vec{E}^T_2\cdot\vec{H}^\perp_1\right]dS = j\omega\int\limits_V\left(\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2\right)\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2dV +$$
$$+\int\limits_V\left\{\left[\mu_2\vec{J}^e_2+\left(\vec{\nabla}\mu_2\times\vec{H}_2\right)\right]\cdot\vec{E}_1-\left[\mu_1\vec{J}^e_1+\left(\vec{\nabla}\mu_1\times\vec{H}_1\right)\right]\cdot\vec{E}_2\right\}dV. \tag{1.3}$$

Здесь символы вида $\vec{A}^T$, $\vec{B}^\perp$ имеют следующий смысл:

$$\vec{A}^T = \vec{A}-\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{A}\right),\qquad \vec{B}^\perp = \vec{n}\times\vec{B}, \tag{1.4}$$

причем $\vec{n}$ – орт внешней нормали к V.

Отметим, что формула (1.3) при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = const$, $\mu_2 = \mu_1 = const$ переходит в обычное интегральное соотношение Лоренца.

Из соотношения (1.3) путем замены

---

[1] Везде в монографии временная зависимость полей предполагается вида $exp(-j\omega t)$

$$\vec{E}_\alpha \leftrightarrow \vec{H}_\alpha, \quad \vec{J}^e_\alpha \leftrightarrow -\vec{J}^m_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha \leftrightarrow \mu_\alpha \quad (\alpha = 1,2)$$

выводится равенство, справедливое для полей, возбуждаемых магнитными токами.

$$\int\limits_L \left[\varepsilon_2 \vec{E}_2^T \cdot \vec{H}_1^\perp - \varepsilon_1 \vec{E}_1^T \cdot \vec{H}_2^\perp\right] dS = j\omega \int\limits_V (\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2)\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 \, dV +$$
$$+ \int\limits_V \left\{\left[\varepsilon_2 \vec{J}_2^m - \left(\vec{\nabla}\varepsilon_2 \times \vec{E}_2\right)\right] \cdot \vec{H}_1 - \left[\varepsilon_1 \vec{J}_1^m - \left(\vec{\nabla}\varepsilon_1 \times \vec{E}_1\right)\right] \cdot \vec{H}_2\right\} dV. \qquad (1.3')$$

Формулы типа (1.3) и являются обобщением известной леммы Лоренца [4, 10] на случай неоднородных сред и полей, соответствующих двум различным материальным заполнениям рассматриваемой области V.

Если область V бесконечна, то (как и в обычной лемме Лоренца) для справедливости соотношений (1.3), (1.3') достаточно потребовать, чтобы сторонние токи были распределены лишь в какой-то конечной области, а поля удовлетворяли условиям излучения [4, 10].

Другая форма обобщения леммы Лоренца была получена в более поздних работах [11, 12].

1.2. Применение обобщенной леммы Лоренца к получению интегральных представлений возмущений, вносимых во вторичное излучение радиопрозрачными и поглощающими слоистыми структурами

Примем, что L есть совокупность поверхностей, ограничивающих извне идеально проводящие рассеиватели $V_1^+, V_2^+, \ldots, V_M^+$, а во внешней области V, характеризуемой проницаемостями $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$, задано распределение сторонних электрических токов с плотностью $\vec{J}^e(x)$ или, что равносильно, эквивалентных магнитных токов $\vec{J}^m(x)$. Соответствующее полное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ удовлетворяет условию

$$\left.\vec{E}^T\right|_L = 0. \tag{1.5}$$

Задача состоит в получении таких интегральных представлений поля $\vec{E}$, $\vec{H}$, которые позволяли бы эффективно оценивать роль отдельных рассеивателей либо роль физических свойств среды, заполняющей область V, в формировании этого поля. Для этого поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ сопоставляется с некоторыми вспомогательными ("эталонными") полями посредством обобщенной леммы Лоренца (1.3).

Введем в область V вспомогательное поле (поле "электрического типа") $\vec{\mathscr{E}}^e\left(x\,\middle|\,x_0,\vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}^e\left(x\,\middle|\,x_0,\vec{p}\right)$, удовлетворяющее в области V уравнениям

$$\begin{gathered} rot\vec{\mathscr{E}}^e = j\,\omega\,\mu_0\,\vec{\mathscr{H}}^e, \\ rot\vec{\mathscr{H}}^e = -j\,\omega\,\varepsilon_0\,\vec{\mathscr{E}}^e - j\,\omega\,\vec{p}\,\delta(x-x_0), \end{gathered} \tag{1.6}$$

(ε_0, μ_0 – проницаемости свободного пространства, $x_0 \in V$) и тем или иным граничным условиям на L (формулируемым в каждом конкретном рассмотрении дополнительно). Аналогичным образом можно ввести поле "магнитного типа".

Рассмотрим случай, когда материальные среды (однородные или кусочно-однородные) распределены лишь в некоторой части T области V, дополнение же $V^- = V \setminus T$ есть область свободного пространства. Однородные среды отделены одна от другой и от области V^- гладкими поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_N$ [1], и таким образом, образуют слоистую структуру. Кроме того, рас-

---

[1] S_i – поверхности, замкнутые либо уходящие на бесконечность или же имеющие край (краевые линии), принадлежащий границе L области V.

смотрим только распределения сторонних источников в области V^{-}, где $\mu(x) \equiv \mu_0$, $\varepsilon(x) \equiv \varepsilon_0$. Применим далее в области V обобщенную лемму Лоренца к полю $\vec{E}_1 = \vec{E}(x)$, $\vec{H}_1 = \vec{H}(x)$, для которого $\varepsilon_1 = \varepsilon(x)$, $\mu_1 = \mu(x)$, $\vec{J}_1^e = \vec{J}^e(x)$ и к полю $\vec{E}_2 = \vec{\mathscr{E}}^e(x|x_0, \vec{p})$, $\vec{H}_2 = \vec{\mathscr{H}}^e(x|x_0, \vec{p})$, для которого $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\vec{J}_2^e = -j\,\omega\,\vec{p}\,\delta(x - x_0)$ (при произвольной ориентации $\vec{p}$). При этом воспользуемся принципом суперпозиции и тем фактом, что вблизи S_i

$$\vec{\nabla}\mu = \vec{n}\frac{\partial \mu}{\partial n} = \vec{n}\left(\mu_i^{+} - \mu_i^{-}\right)\delta(n) = \vec{n}\,\Delta\mu_i\delta(n),$$

$$\vec{\nabla}\varepsilon = \vec{n}\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \vec{n}\left(\varepsilon_i^{+} - \varepsilon_i^{-}\right)\delta(n) = \vec{n}\,\Delta\varepsilon_i\delta(n). \qquad (1.7)$$

Здесь $\vec{n}$ – орт нормали к S_i, n – координата, отсчитываемая по нормали, причем $n = 0$ на S_i, $n > 0$ в направлении $\vec{n}$, $\delta(n)$ – дельта-функция; μ_i^{+}, μ_i^{-} – предельные значения $\mu(x)$ на S_i соответственно со стороны положительных и отрицательных n.

Тогда, из (1.3) получим равенство

$$\begin{aligned} j\,\omega\,\mu_0\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}(x_0) - \vec{\mathscr{E}}(x_0)\right] &= \int_L \mu(x)\vec{\mathscr{E}}^{eT}\left(x\,|\,x_0, \vec{p}\right)\cdot \vec{H}^{\perp}(x)\,dS + \\ &+ j\omega\int_T \left[\varepsilon(x)\mu(x) - \varepsilon_0\,\mu_0\right]\vec{E}(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}^e\left(x\,|\,x_0, \vec{p}\right)dV - \\ &- \sum_{i=1}^{N}\Delta\mu_i\int_{S_i}\vec{\mathscr{E}}^{eT}\left(x\,|\,x_0, \vec{p}\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)\,dS. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Аналогичное интегральное представление вектора магнитной напряженности $\vec{H}$ выводится из (1.3'):

$$j\,\omega\,\varepsilon_0\,\vec{q}\cdot\left[\vec{H}\,(\,x_0\,)-\vec{\mathscr{H}}\,(x_0)\right] =$$
$$= j\omega\int\limits_V \left[\varepsilon(x)\mu(x)-\varepsilon_0\,\mu_0\right]\vec{H}\,(x)\cdot\vec{\mathscr{H}}^m\!\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)dV -$$
$$-\,\varepsilon_0\int\limits_L \vec{\mathscr{E}}^{mT}\!\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)dS +$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\Delta\varepsilon_i\int\limits_{S_i}\vec{\mathscr{H}}^{mT}\!\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)\cdot\vec{E}^{\perp}(x)dS. \qquad (1.8')$$

Здесь $\vec{\mathscr{E}}\,(x_0)$, $\vec{\mathscr{H}}(x_0)$ – векторы электрической и магнитной напряженности эталонного поля, возбуждаемого в области пространства V теми же сторонними источниками, которые в реальной среде, заполняющей V, возбуждают поле $\vec{E}(x_0)$, $\vec{H}(x_0)$, однако при других граничных условиях на L, определяемых структурой и граничными свойствами выбранного вспомогательного поля точечного источника, например для $\vec{\mathscr{E}}\,(x_0)$, в соответствии с формулой

$$-\,j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{\mathscr{E}}\,(x_0)=\int\limits_{V^-}\vec{J}^e(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}^e\!\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)dV.$$

Если теперь в представлении (1.8) положить $\vec{x}_0=|\vec{x}_0|\vec{r}^{\,0}$ и $|\vec{x}_0|\to\infty$, то получим интегральное представление для векторной комплексной диаграммы направленности $\vec{E}\!\left(\vec{r}^{\,0}\right)$:

$$j\,\omega\,\mu_0\vec{p}\cdot\left[\vec{E}\!\left(\vec{r}^{\,0}\right)-\vec{\mathscr{E}}\!\left(\vec{r}^{\,0}\right)\right] = \int\limits_L \mu(x)\vec{\mathscr{E}}^{eT}\!\left(x\,|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\,\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)dS +$$
$$+\,j\omega\int\limits_T\left[\varepsilon(x)\mu(x)-\varepsilon_0\,\mu_0\right]\vec{E}(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}^e\!\left(x\,|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)dV -$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\Delta\mu_i\int\limits_{S_i}\vec{\mathscr{E}}^{eT}\!\left(x\,|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)dS. \qquad (1.9)$$

В представлении (1.9) поле $\vec{\mathscr{E}}^{e}\left(x\middle|\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}^{e}\left(x\middle|\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)$ возбуждается плоской волной:

$$\vec{\mathscr{E}}_0^{e}\left(x\middle|\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)=k_0^2\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\vec{p}-\vec{r}^{\,0}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}^{\,0}\right)\right]exp\left(-j\,k_0\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\right),$$

$$\vec{\mathscr{H}}_0^{e}\left(x\middle|\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)=-k_0^2\,\omega\left(\vec{r}^{\,0}\times\vec{p}\right)exp\left(-j\,k_0\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\right), \tag{1.10}$$

где $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$.

Если в качестве вспомогательного поля в (1.9) использовать решение уравнений (1.6), удовлетворяющее при $x_0\in V$ граничному условию

$$\vec{\mathscr{E}}^{eT}\left(x\,\middle|\,x_0,\vec{p}\right)\Big|_{x\in L}=0, \tag{1.11}$$

то есть выбрать в качестве вспомогательного поля поле точечного источника, расположенного в точке x_0, с вектор-моментом $\vec{p}$ в присутствии идеально проводящих рассеивателей с поверхностью L, то представление (1.9) примет следующий вид:

$$j\omega\,\mu_0\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}^{\,0}\right)-\vec{\mathscr{E}}\left(\vec{r}^{\,0}\right)\right]=$$

$$=j\omega\int_T\left[\varepsilon(x)\mu(x)-\varepsilon_0\,\mu_0\right]\,\vec{E}(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}^{e}\left(x\,\middle|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)\,dV-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\Delta\mu_i\int_{S_i}\vec{\mathscr{E}}^{eT}\left(x\,\middle|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)\,dS. \tag{1.12}$$

Таким образом, в этом случае $\vec{\mathscr{E}}\left(x_0\right)$, $\vec{\mathscr{H}}\left(x_0\right)$ означает поле, возбуждаемое данными источниками при отсутствии материальных сред, а представление (1.12) дает выражение поправки, вносимой в дальней зоне наличием среды T .

В простейшем случае, когда $\mu \equiv \mu_0$, представление (1.9) приобретает особенно простой вид при любом $\vec{p}$ и $x_0 \in V$:

$$\vec{p} \cdot \left[\vec{E}(x_0) - \vec{\mathscr{E}}(x_0)\right] = (\varepsilon - \varepsilon_0) \int_T \vec{E}(x) \cdot \vec{\mathscr{E}}^e\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) dV. \tag{1.13}$$

Из (1.13) получаем поправки к комплексной диаграмме направленности:

$$\vec{p} \cdot \left[\vec{E}\left(\vec{r}^{\,0}\right) - \vec{\mathscr{E}}\left(\vec{r}^{\,0}\right)\right] = (\varepsilon - \varepsilon_0) \int_T \vec{E}(x) \cdot \vec{\mathscr{E}}^e\left(x \mid \vec{r}^{\,0}, \vec{p}\right) dV. \tag{1.14}$$

Если поля $\vec{\mathscr{E}}(x_0)$, $\vec{\mathscr{E}}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$ известны, то при $x_0 \in T$ равенство (1.13) есть интегральное уравнение относительно поля, возбуждаемого в среде T .

В этом случае, когда многообразие T представляет собой совокупность тонких слоев диэлектрика (толщина δ которой мала), из соотношения (1.13) могут быть получены асимптотические формулы, тем более точные, чем меньше безразмерный параметр $\overline{\delta} = \delta / \lambda_0$. При малом $\overline{\delta}$ интегральный член в (1.13), как следует ожидать из физических соображений, должен быть малым. Можно показать, что этот интеграл, равно как и вообще интеграл вида

$$I(x_0) = \int_T \vec{F}(x) \cdot \vec{\mathscr{E}}^e\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) dV$$

с гладкой в области T (вплоть до ее границы) вектор-функцией $\vec{F}(x)$, допускает при $x_0 \in T$ оценку

$$\left| I\left(x_0\right)\right| \le const\,\overline{\delta}.^{1} \tag{1.15}$$

Из равенства (1.13) и оценки вида (1.15) следует, что при $x \in T$

$$\vec{E}\left(x\right) = \vec{\mathscr{E}}\left(x\right) + O\left(\overline{\delta}\right),$$

поэтому из (1.14) получаем

$$\vec{p}\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}^{\,0}\right) - \vec{\mathscr{E}}\left(\vec{r}^{\,0}\right)\right] = \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\int\limits_T \vec{\mathscr{E}}\left(x\right)\cdot \vec{\mathscr{E}}^{\,e}\left(x \,|\, \vec{r}^{\,0}, \vec{p}\right) dV + o\left(\overline{\delta}\right). \tag{1.16}$$

Равенства типа (1.16) и могут служить расчетными формулами с оценкой погрешности $o\left(\overline{\delta}\right)$.

Рассмотрим еще одно из возможных применений обобщенной леммы Лоренца. Пусть некоторая идеально проводящая поверхность L покрыта слоем T радиопоглощающего материала (рис. 1.1) с проницаемостями ε_1, μ_1.

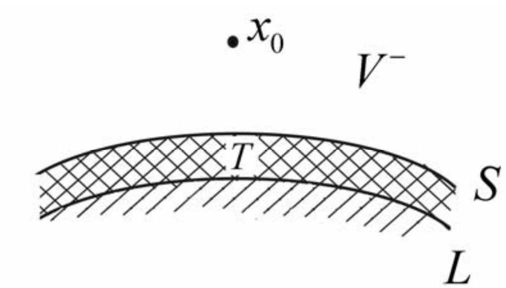

Рис. 1.1. Идеально проводящая поверхность, покрытая слоем радиопоглощающего материала

---

[1] Оценка (1.15) нетривиальна, ибо ее получение основано (в конечном счете) на оценивании сингулярных интегралов вида $\int\limits_T \Phi\left(x\right)\dfrac{-\vec{p}+3\left(\vec{p}\cdot\vec{R}^0\right)\vec{R}^0}{R^3}dV$,

где $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}_0$, $R = \left|\vec{R}\right|$, $\vec{R}^0 = \vec{R}\,/\,R$.

Пусть, далее, известно поле $\left(\vec{\mathscr{E}}_2, \vec{\mathscr{H}}_2\right)$, порожденное электрическим диполем $\vec{J}_2^e = -j\,\omega\,\vec{p}\,\delta\left(x - x_0\right)$[1] в присутствии указанной рассеивающей поверхности, но для проницаемостей материала слоя T ε_2, μ_2. Необходимо определить поле $\vec{E}_1$, порожденное сторонними источниками (с плотностью тока $\vec{J}_1^e$), расположенными в области V^-, в присутствии радиопоглощающего слоя T на металлической подложке L. При этом известно, что значение ε_1 близко к ε_2, а μ_1 к μ_2.

Пусть точка наблюдения $x_0 \in V^-$. Применим обобщенную лемму Лоренца (1.3) к полям $\left(\vec{E}_1, \vec{H}_1\right)$ и $\left(\vec{\mathscr{E}}_2, \vec{\mathscr{H}}_2\right)$ в области $V = V^-$ с границей $\partial V = S$. В результате получим соотношение:

$$-\,j\,\omega\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}_1\left(x_0\right) - \vec{E}_2\left(x_0\right)\right] = \int\limits_S \left(\vec{E}_1^T \cdot \vec{\mathscr{H}}_2^{\perp} - \vec{\mathscr{E}}_2^T \cdot \vec{H}_1^{\perp}\right) dS\,. \qquad (1.17)$$

Пусть, далее, область $V = T$, а ее граница $\partial V = S \bigcup L$. Применение леммы (1.3) к тем же полям в этом случае дает

$$\int\limits_S \left\{\mu_2 \vec{E}_1^T \cdot \vec{\mathscr{H}}_2^{\perp} - \mu_1 \vec{\mathscr{E}}_2^T \cdot \vec{H}_1^{\perp}\right\} dS = j\,\omega\,\left(\varepsilon_1\,\mu_1 - \varepsilon_2\,\mu_2\right) \int\limits_T \vec{E}_1 \cdot \vec{\mathscr{E}}_2\, dV\,. \quad (1.18)$$

Домножая (1.17) на μ_1 и вычитая полученное равенство из (1.18), придем к соотношению:

---

[1] Отметим, что, воспользовавшись принципом суперпозиции, поле $\vec{E}_2$, порожденное заданным сторонним распределением тока $\vec{J}_1^e$, можно представить с помощью равенства:
$-\,j\,\omega\,\vec{p}\,\vec{E}_2\left(x_0\right) = \int\limits_V \vec{J}_1^e \cdot \vec{\mathscr{E}}_2\left(x \,|\, x_0, \vec{p}\right) dV$, где V содержит все сторонние источники излучения.

$$j\,\omega\,\mu_1\,\vec{p}\left[\vec{E}_1(x_0)-\vec{E}_2(x_0)\right]=(\mu_2-\mu_1)\int\limits_S \vec{E}_1^T\cdot\vec{\mathscr{H}}_2^{\perp}\,dS-$$

$$-\,j\,\omega\,(\varepsilon_1\,\mu_1-\varepsilon_2\,\mu_2)\int\limits_T \vec{E}_1\cdot\vec{\mathscr{E}}_2\,dV. \tag{1.19}$$

Проделав аналогичные преобразования в случае, когда $x_0\in T$, получим интегральное уравнение для поля $\vec{E}_1$ в слое T:

$$-\,j\,\omega\,\vec{p}\left\{\mu_2\vec{E}_1(x_0)-\mu_1\vec{E}_2(x_0)\right\}=(\mu_2-\mu_1)\int\limits_S \vec{E}_1^T\cdot\vec{\mathscr{H}}_2^{\perp}\,dS-$$

$$-\,j\,\omega\,(\varepsilon_1\,\mu_1-\varepsilon_2\,\mu_2)\int\limits_T \vec{E}_1\cdot\vec{\mathscr{E}}_2\,dV. \tag{1.20}$$

Из уравнения (1.20) с учетом малости величин $|\mu_1-\mu_2|$, $|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$ можно получить асимптотическое представление для поля $\vec{E}_1(x_0)$ при $x_0\in T$. Главный член этой асимптотики, очевидно, имеет вид

$$\vec{E}_1(x_0)\sim\frac{\mu_1}{\mu_2}\vec{E}_2(x_0). \tag{1.21}$$

Проведя один раз итерирование уравнения (1.20), подставив с этой целью (1.21) в подынтегральное выражение правой части (1.20), получим уточненное асимптотическое представление поля $\vec{E}_1(x_0)$ в слое T:

$$-\,j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}_1(x_0)\sim-\,j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}_2(x_0)\cdot\frac{\mu_1}{\mu_2}+$$

$$+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{\mu_1}{\mu_2}\int\limits_S \vec{E}_2^T\cdot\vec{\mathscr{H}}_2^{\perp}\,dS-j\,\omega\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{\mu_2}-\varepsilon_2\right)\frac{\mu_1}{\mu_2}\int\limits_T \vec{E}_2\cdot\vec{\mathscr{E}}_2\,dV. \tag{1.22}$$

Использовав соотношение (1.22) в правой части (1.19), получим выражение для поля $\vec{E}_1(x_0)$ при $x_0 \in V^-$, которое дает возможность находить поле $\vec{E}_1$ в области, внешней по отношению к рассеивающей поверхности, через значения полей $\vec{E}_2$, $\vec{\mathscr{E}}_2$, $\vec{\mathscr{H}}_2$, получающихся при другом материальном заполнении области T.

В заключение отметим, что круг возможных практических приложений приведенного в разделе 1.1 обобщения леммы Лоренца довольно широк. Например, интегральное представление (1.8) можно применить не только к структуре, состоящей из идеально проводящих рассеивателей и поглощающих сред, но и к оценке влияния радиопрозрачных оболочек (например, обтекателей) на прохождение и рассеяние электромагнитных волн.

1.3. Обобщенный принцип зеркальных изображений и его приложения к решению некоторых задач рассеяния волн

Основное содержание настоящего раздела составляет описание строгих и физически интерпретируемых математических моделей рассеяния для различных типов рассеивающих объектов (идеальных проводников, идеальных магнетиков, идеально поглощающих объектов), находящихся над подстилающей поверхностью, а также математической модели апертурной антенны, закрытой какой-либо радиопрозрачной конструкцией (обтекателем, антенным укрытием и т.п.). В связи с решением последней задачи в разделе дано также обобщение принадлежащей Я.Н. Фельду [13] принципиально важной трактовки метода эквивалентных токов для расчета поля апертурной антенны на тот случай, когда антенна излучает в полупространство, содержащее рассеиватели-диэлектрики, проводники, магнетики. При этом оказалось необходимым надлежащим образом обобщить классический принцип зеркальных изображений.

1.3.1. Обобщенный принцип зеркальных изображений

Введем обозначение полупространства $\Omega^{+}(x_3>0)$ и его зеркального изображения $\Omega^{-}(x_3<0)$. Область Ω^{+} содержит:

а) идеально проводящие рассеиватели, совокупность граничных поверхностей которых обозначаем как S_E, так что

$$\vec{E}^{T}\Big|_{S_E}=0;$$

б) рассеиватели – идеальные магнетики, на граничной поверхности которых (S_H)

$$\vec{H}^{T}\Big|_{S_H}=0;$$

при этом часть Ω_1^{+}, полупространства Ω^{+}, граница которой состоит из плоскости $S(x_3=0)$, S_E, S_H заполнена изотропной и, вообще говоря, неоднородной средой с комплексными проницаемостями $\varepsilon(\vec{x})$, $\mu(\vec{x})$, которые могут иметь и поверхности разрыва непрерывности (границы раздела).

Введем также обозначение Ω_1^{-}, для зеркального изображения области Ω_1^{+} в плоскости S и рассмотрим "симметризованную" область $\Omega_1=\Omega_1^{+}\cup S\cup\Omega_1^{-}$ с симметричными по геометрической конфигурации и физическим свойствам рассеивателями и заполняющей средой, в которой

$$\begin{cases}\varepsilon(x_1,x_2,-x_3)\equiv\varepsilon(x_1,x_2,x_3)\\ \mu(x_1,x_2,-x_3)\equiv\mu(x_1,x_2,x_3).\end{cases}\tag{1.25}$$

Введем необходимую символику: если $\vec{A}=\{A_1,A_2,A_3\}$ – какое-либо векторное поле, то $\vec{A}'=\{A_1,A_2,-A_3\}$; в частности, если радиус-вектор точки $\vec{x}=(x_1,\,x_2,\,x_3)$, то $\vec{x}'=(x_1,\,x_2,\,-x_3)$. Тогда имеет место следующее утверждение ("обобщенный принцип зеркальных изображений").

Пусть $\vec{\mathscr{E}}_0\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}_0\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)$ – поле, возбуждаемое в симметризованной области Ω_1 электрическим диполем момента $\vec{p}$, расположенным в точке $x_0\in\Omega_1$. Тогда для каждой точки $x\in\Omega_1$ имеют место равенства

$$\vec{\mathscr{E}}_0\left(x\,|\,x_0',\vec{p}'\right)=\vec{\mathscr{E}}_0'\left(x'\,|\,x_0,\vec{p}\right), \tag{1.26}$$

$$\vec{\mathscr{H}}_0\left(x\,|\,x_0',\vec{p}'\right)=-\vec{\mathscr{H}}_0'\left(x'\,|\,x_0,\vec{p}\right), \tag{1.27}$$

которые и выражают обобщенный принцип зеркальных изображений.

Строгий вывод этих равенств (вполне естественный с точки зрения физической интуиции) может быть основан на следующем, легко проверяемом соотношении:

$$rot\,\vec{A}'(\,x'\,)=-\left(rot\,\vec{A}\,(x\,)\right)'\Big|_{x\Rightarrow x'} \tag{1.28}$$

(символ $x\Rightarrow x'$ означает здесь, что, вычислив вектор $-\left(rot\,\vec{A}\,(x\,)\right)'$, нужно заменить x на x'). Введем краткие обозначения:

$$\vec{\mathscr{E}}_0(x)=\vec{\mathscr{E}}_0\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right),\ \vec{\mathscr{H}}_0(x)=\vec{\mathscr{H}}_0\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right),$$

$$\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)}(x)=\vec{\mathscr{E}}_0'\left(x'\,|\,x_0,\vec{p}\right),\ \vec{\mathscr{H}}_0^{(1)}(x)=-\vec{\mathscr{H}}_0'\left(x'\,|\,x_0,\vec{p}\right).$$

Тогда из уравнений Максвелла

$$rot\,\vec{\mathscr{E}}_0(x)=j\,\omega\,\mu(x)\vec{\mathscr{H}}_0(x)\,,$$

$$rot\,\vec{\mathscr{H}}_0(x)=-j\,\omega\,\varepsilon(x)\vec{\mathscr{E}}_0(x)-j\,\omega\,\vec{p}\,\delta(x-x_0)\ .$$

Воспользовавшись соотношениями (1.25), (1.28), выводим

$$rot\,\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x) = rot\,\vec{\mathcal{E}}_0'(x') = -\left(rot\,\vec{\mathcal{E}}_0(x)\right)'\Big|_{x\Rightarrow x'} =$$

$$= -j\,\omega\,\mu(x')\vec{\mathcal{H}}_0'(x') = j\,\omega\,\mu(x)\vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x); \qquad (1.29)$$

аналогично получается

$$rot\,\vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x) = -j\,\omega\,\varepsilon(x)\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x) - j\,\omega\,\vec{p}'\delta(x - x_0'). \qquad (1.30)$$

Таким образом, $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x)$, $\vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x)$ есть поле, возбуждаемое током $\vec{J}_0(x) = -j\,\omega\,\vec{p}'\,\delta(x - x_0')$. Далее непосредственно проверяется выполнение граничных условий на S_E, S_H и на их зеркальных изображениях.

Например, так как на S_E $\vec{\mathcal{E}}_0(x) = \vec{n}\,\mathcal{E}_{0n}(x)$ ($\vec{n}$ – орт нормали), то $\vec{\mathcal{E}}_0'(x) = \vec{n}'\,\mathcal{E}_{0n}(x')$, откуда $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x)\Big|_{S_E} = \vec{\mathcal{E}}_0'(x') = \vec{n}\,\mathcal{E}_{0n}(x)$ и, следовательно, $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)T}\Big|_{S_E} = 0$.

Наконец, поле $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x)$, $\vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x)$, очевидно, удовлетворяет (в случае неограниченной области Ω_1) и условиям излучения.

В силу единственности рассматриваемой здесь граничной задачи из уравнений (1.29), (1.30), граничных соотношений на S_E, S_H и на их зеркальных изображениях (и условий излучения, если Ω_1 неограничена) получаем, что поле $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x)$, $\vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x)$ совпадает с полем $\vec{\mathcal{E}}_0(x\,|\,x_0', \vec{p}')$, $\vec{\mathcal{H}}_0(x\,|\,x_0', \vec{p}')$, что и доказывает наше утверждение.

По поводу этого утверждения необходимо сделать следующие замечания. Во-первых, аналогичное утверждение справедливо и для полей, возбуждаемых магнитными диполями.

Во-вторых, с помощью принципа суперпозиции и интегрального представления

$$\vec{J}(x) = \int_{\Omega_1} \vec{J}(x_0)\delta(x - x_0)\,dV_{x_0}$$

принцип зеркальных изображений в приведенной выше форме (примененный в [14 – 16]) переносится на поля, возбуждаемые любыми сторонними токами.

1.3.2. О расчете влияния подстилающей поверхности на рассеивающие свойства цели

Пусть плоскость Σ (будем считать ее идеально проводящей) ограничивает полупространство, содержащее рассеивающий объект с граничной поверхностью S (идеальный проводник либо идеальный магнетик).

Стандартный метод получения интегрального уравнения для поверхностных токов, возбуждаемых заданными сторонними источниками, расположенными в рассматриваемом полупространстве (метод, основанный на интегральных соотношениях типа Стрэттона-Чу [10]), приводит к уравнениям, содержащим не только интеграл по поверхности рассеивателя S, но и по безграничной плоскости Σ, что резко затрудняет численное решение. Применение же принципа зеркальных изображений в обобщенной форме позволяет получить токовое интегральное уравнение с интегрированием лишь по S, которое может служить основой для устойчивых и эффективных вычислительных алгоритмов. Ниже приводится соответствующий вывод.

Обозначим через Ω_1^+ область пространства, ограниченную поверхностями S и Σ. Область Ω_1^+ может содержать как неоднородности среды, так и другие рассеиватели.

Введем обозначения:

$\vec{E}^i(x)$, $\vec{H}^i(x)$ – падающая на объект волна;

$\vec{E}_1(x)$, $\vec{H}_1(x)$ – рассеянное поле;

$\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$ – полное поле;

$\vec{\mathscr{E}}^e(x \mid x_0, \vec{p})$, $\vec{\mathscr{H}}^e(x \mid x_0, \vec{p})$ – поле точечного электрического диполя в полупространстве, ограниченном плоскостью Σ, при отсутствии объекта S;

$\vec{\mathscr{E}}^m(x \mid x_0, \vec{q})$, $\vec{\mathscr{H}}^m(x \mid x_0, \vec{q})$ – аналогичное поле точечного магнитного диполя.

Отметим, что с помощью введенного в п. 1.3.1 поля $\vec{\mathscr{E}}_0$, $\vec{\mathscr{H}}_0$ (поля, возбуждаемого в симметризованной области Ω_1 в отсутствие объекта S) поле $\vec{\mathscr{E}}^e$, $\vec{\mathscr{H}}^e$ может быть выражено следующим образом:

$$\vec{\mathscr{E}}^e = \vec{\mathscr{E}}_0(x \mid x_0, \vec{p}) - \vec{\mathscr{E}}_0(x \mid x_0', \vec{p}'), \tag{1.31}$$

$$\vec{\mathscr{H}}^e = \vec{\mathscr{H}}_0(x \mid x_0, \vec{p}) - \vec{\mathscr{H}}_0(x \mid x_0', \vec{p}'). \tag{1.32}$$

Это следует из того, что в силу (1.31), (1.26)

$$\vec{\mathscr{E}}^e = \vec{\mathscr{E}}_0(x \mid x_0, \vec{p}) - \vec{\mathscr{E}}_0'(x' \mid x_0, \vec{p});$$

откуда при $x \in \Sigma$

$$\left.\vec{\mathscr{E}}^{eT}\right|_{\Sigma} = 0.$$

Применив, далее, лемму Лоренца к полям $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$ и $(\vec{\mathscr{E}}^e, \vec{\mathscr{H}}^e)$, а также к полям $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$ и $(\vec{\mathscr{E}}^m, \vec{\mathscr{H}}^m)$, учитывая, что поле $(\vec{\mathscr{E}}^e, \vec{\mathscr{H}}^e)$ порождено током $\vec{J}^e = -j\,\omega\,\vec{p}\,\delta(x - x_0)$, а поле $(\vec{\mathscr{E}}^m, \vec{\mathscr{H}}^m)$ –

током $\vec{J}^m = -j\,\omega\,\vec{q}\,\delta(x - x_0)$ (причем, в первом случае $\vec{J}^m = 0$, а во втором – $\vec{J}^e = 0$), получим соотношения:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}_1(x_0) = \int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}_1\,\vec{\mathscr{H}}^e\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^e\,\vec{H}_1\,\vec{n}\right)\right]dS\,,^1 \tag{1.33}$$

$$-j\,\omega\,\vec{q}\cdot\vec{H}_1(x_0) = \int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}_1\,\vec{\mathscr{H}}^m\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^e\,\vec{H}_1\,\vec{n}\right)\right]dS. \tag{1.34}$$

Применив лемму Лоренца к полям $\left(\vec{E}^i, \vec{H}^i\right)$ и $\left(\vec{\mathscr{E}}^e, \vec{\mathscr{H}}^e\right)$, и к полям $\left(\vec{E}^i, \vec{H}^i\right)$ и $\left(\vec{\mathscr{E}}^m, \vec{\mathscr{H}}^m\right)$, получим

$$\int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}^i\,\vec{\mathscr{H}}^{(e,m)}\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^{(e,m)}\,\vec{H}^i\,\vec{n}\right)\right]dS = 0. \tag{1.35}$$

Объединив соотношения (1.33), (1.34) с (1.35), получим представления полного поля:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}(x_0) - \vec{E}^i(x_0)\right] = \int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}\,\vec{\mathscr{H}}^e\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^e\,\vec{H}\,\vec{n}\right)\right]dS\,, \tag{1.36}$$

$$-j\,\omega\,\vec{q}\cdot\left[\vec{H}(x_0) - \vec{H}^i(x_0)\right] = \int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}\,\vec{\mathscr{H}}^m\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^m\,\vec{H}\,\vec{n}\right)\right]dS. \tag{1.37}$$

Рассмотрим два случая:

А) S – поверхность идеального проводника; в этом случае

$$\left.\vec{E}^T\right|_\Sigma = 0,\quad \left.\vec{E}^T\right|_S = 0;$$

В) S – поверхность идеального магнетика; при этом

$$\left.\vec{H}^T\right|_S = 0\,,\quad \left.\vec{E}^T\right|_\Sigma = 0\,.$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем символ $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ означает смешанное произведение векторов

В случае А при $x_0 \in \Omega_1^+$ соотношения (1.36), (1.37) примут вид:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}(x_0)-\vec{E}^i(x_0)\right] = -\int\limits_S\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,e}\,\vec{H}\,\vec{n}\right)dS\,, \tag{1.38}$$

$$-\,j\,\omega\,\vec{q}\cdot\left[\vec{H}(x_0)-\vec{H}^i(x_0)\right] = -\int\limits_S\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,m}\,\vec{H}\,\vec{n}\right)dS\,, \tag{1.39}$$

а в случае В:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}(x_0)-\vec{E}^i(x_0)\right] = \int\limits_S\left(\vec{E}\,\vec{\mathscr{H}}^{e}\,\vec{n}\right)dS\,, \tag{1.40}$$

$$-\,j\,\omega\vec{q}\cdot\left[\vec{H}(x_0)-\vec{H}^i(x_0)\right] = \int\limits_S\left(\vec{E}\,\vec{\mathscr{H}}^{m}\,\vec{n}\right)dS\,. \tag{1.41}$$

Поля $\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,e},\vec{\mathscr{H}}^{e}\right)$, $\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,m},\vec{\mathscr{H}}^{m}\right)$ содержат в качестве аддитивной составляющей поле электрического (магнитного) диполя в свободном пространстве. Так, например,

$$\vec{\mathscr{H}}^{e} = \vec{H}_0^e + \vec{H}^{\,рас}\,,$$

где $\vec{H}^{\,рас}$ представляет собой регулярное поле, а

$$\vec{H}_0^e = j\,\omega\,\left(\vec{p}\times\vec{\nabla}g\right),$$

$$g = \frac{exp\left(j\,k_0\,|\,\vec{x}-\vec{x}_0|\,\right)}{4\,\pi|\,\vec{x}-\vec{x}_0|}\,.$$

Тогда

$$\left(\vec{E}\,\vec{H}_0^e\,\vec{n}\right) = -j\,\omega\,\vec{E}\left(\,\vec{p}\,\frac{\partial\,g}{\partial\,n}-\left(\vec{p}\cdot\vec{n}\right)\vec{\nabla}\,g\right)$$

и, если представить оператор $\vec{\nabla}$ в виде

$$\vec{\nabla} = \vec{n}\frac{\partial}{\partial n} + \vec{D},$$

где $\vec{D}$ – тангенциальный дифференциальный оператор, то

$$\left(\vec{E}\,\vec{H}_0^e\,\vec{n}\right) = -j\,\omega\,\vec{E}\cdot\left(\vec{p}^T\frac{\partial g}{\partial n} - (\vec{p}\cdot\vec{n})\vec{D}\,g\right).$$

Отметим, что функция $\partial g/\partial n$ представляет собой ядро потенциала двойного слоя.

Если теперь воспользоваться тем, что на поверхности S в случае А $H_n\big|_S = 0$, а в случае В – $E_n\big|_S = 0$ (это вытекает из уравнений Максвелла и граничных условий на поверхности S), а также граничными свойствами потенциала двойного слоя и устремить точку x_0 к поверхности S, то из (1.39), (1.40) могут быть получены интегральные уравнения:

$$-\frac{1}{2}j\,\omega\,\vec{q}\cdot\vec{H}^T(x_0) + j\,\omega\,\vec{q}\cdot\vec{H}^i(x_0) = \int_S\left(\vec{\mathscr{E}}^m\,\vec{H}^T\,\vec{n}\right)dS, \qquad (1.42)$$

$$\frac{1}{2}j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^T(x_0) - j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^i(x_0) = \int_S\left(\vec{E}^T\,\vec{\mathscr{H}}^e\,\vec{n}\right)dS. \qquad (1.43)$$

Уравнения (1.42), (1.43) содержат лишь интегрирование по конечной поверхности S и поэтому представляют собой уравнения типа Фредгольма второго рода, которые допускают эффективное сведение к хорошо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений.

Решив интегральное уравнение (1.42), найдем $\vec{H}^T(x_0)$, и, подставив его в правую часть (1.38), (1.39), найдем поле $\vec{E}^A(x_0)$, $\vec{H}^A(x_0)$ для любого $x_0 \in \Omega_1^+$ в случае, когда S представляет собой поверхность идеального проводника. Аналогично, с помощью интегрального уравнения (1.43) и представлений (1.40), (1.41) определим поле $\vec{E}^B(x_0)$, $\vec{H}^B(x_0)$ для случая, когда S – поверхность идеального магнетика.

Воспользовавшись далее моделью Макдональда [17] идеально "черного" тела, можно получить поле, рассеянное рассматриваемым объектом (при наличии подстилающей поверхности) в предположении, что его поверхность S обладает свойствами идеально "черного" тела. Это поле

$$\vec{E}^C = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^A + \vec{E}^B\right), \quad \vec{H}^C = \frac{1}{2}\left(\vec{H}^A + \vec{H}^B\right) \tag{1.44}$$

возникает в результате облучения первичной волной $\vec{E}^i$, $\vec{H}^i$ идеально поглощающего (в трактовке Макдональда) объекта при наличии подстилающей плоскости и неоднородностей среды.

1.3.3. Расчет поля, возбуждаемого излучающей апертурой в присутствии произвольной системы рассеивателей

Пусть апертура S_0 расположена в плоскости $S(x_3 = 0)$ и излучает в полупространство $\Omega^+(x_3 > 0)$ поле $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$, порождаемое сторонними источниками, которые расположены в полупространстве $\Omega^-(x_3 < 0)$. Область Ω^+ содержит:

а) идеально проводящие рассеиватели, совокупность граничных поверхностей которых обозначим как S_E, так что

$$\vec{E}^T\Big|_{S_E} = 0; \tag{1.45}$$

б) рассеиватели – идеальные магнетики, на граничной поверхности которых (S_H)

$$\left.\vec{H}^T\right|_{S_H} = 0\,. \qquad (1.46)$$

При этом часть Ω_1^+ полупространства Ω^+, граница которой состоит из S, S_E, S_H, заполнена изотропной и, вообще говоря, неоднородной средой с комплексными проницаемостями $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$, которые могут иметь и поверхности разрыва непрерывности (границы раздела). В частности, речь может идти о наличии в Ω^+ радиопрозрачного антенного укрытия G^+ той или иной конструкции (рис. 1.2).

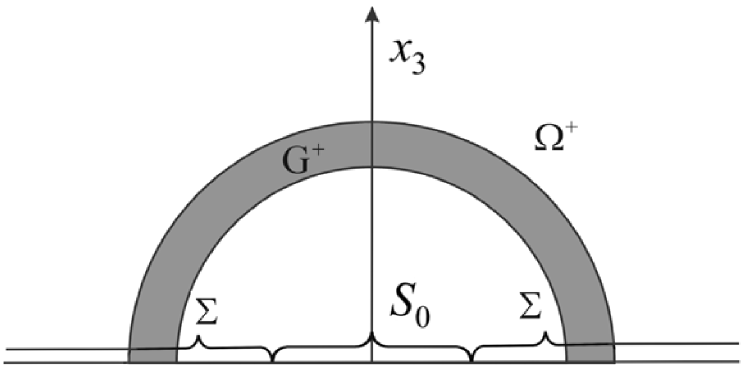

Рис. 1.2. Радиопрозрачное укрытие

Проблема состоит в выводе и физической интерпретации строгих и приближенных расчетных формул, выражающих поле излучения через распределения в апертуре тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (или, что равносильно, через плотности эквивалентных поверхностных токов – магнитного и электрического) при следующих различных предположениях о физических свойствах поверхности $\Sigma = S \setminus S_0$ (символ $S \setminus S_0$ означает дополнение области S_0 до полной плоскости S):

А) Σ – поверхность идеального проводника, $\left.\vec{E}^T\right|_{\Sigma} = 0$;

В) Σ – поверхность идеального магнетика, $\left.\vec{H}^T\right|_\Sigma = 0$;

при этом в задачах А и В сторонние источники одни и те же, одинаковы и все граничные условия, кроме приведенных выше условий на поверхности Σ, граничащей с областью Ω^+.

Введем обозначения $\left(\vec{E}^A, \vec{H}^A\right)$ и $\left(\vec{E}^B, \vec{H}^B\right)$ для полей, возбуждаемых в области Ω_1^+ данными сторонними источниками, соответственно в задачах А и В. Наряду с этими полями рассматриваются и их полусуммы

$$\vec{E}^C = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^A + \vec{E}^B\right), \qquad \vec{H}^C = \frac{1}{2}\left(\vec{H}^A + \vec{H}^B\right), \tag{1.47}$$

образующие некоторое "усреднение" полей, излучаемых апертурой S_0 в ситуациях, когда Σ есть поверхность идеального проводника (вариант А) и идеального магнетика (вариант В). Усредненное поле (1.47) можно трактовать как поле, формально соответствующее модели Макдональда идеально черной поверхности Σ.

Применим лемму Лоренца к интересующему нас полю $\vec{E}$, $\vec{H}$ (в вариантах А или В) и к полю $\vec{\mathscr{E}}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$, возбуждаемому в области Ω_1^+ электрическим диполем момента $\vec{p}$, расположенным в точке $x \in \Omega_1^+$, если вся плоскость $S(x_3 = 0)$ является одной из материальных граничных поверхностей области Ω_1^+, причем

$$\left.\vec{\mathscr{E}}^T\right|_S = 0 \quad \text{(в варианте А)}, \tag{1.48}$$

$$\left.\vec{\mathscr{H}}^T\right|_S = 0. \quad \text{(в варианте В)}. \tag{1.49}$$

Так как сторонние токи, возбуждающие поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, распределены в Ω^-, а плотность тока, возбуждающего поле $\vec{\mathscr{E}}$, $\vec{\mathscr{H}}$,

$$\vec{J}_0 = -j\,\omega\,\vec{p}\,\delta(x - x_0), \tag{1.50}$$

то

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}(x_0) = \int\limits_S + \int\limits_{S_E} + \int\limits_{S_H} \left(\left(\vec{E}\times\vec{\mathscr{H}}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}\times\vec{H}\right)\right)\cdot d\vec{S}\,. \tag{1.51}$$

В силу граничных условий вида (1.45), (1.46)

$$\left.\vec{E}^T\right|_{S_E} = \left.\vec{\mathscr{E}}^T\right|_{S_E} = 0\,,\quad \left.\vec{H}^T\right|_{S_H} = \left.\vec{\mathscr{H}}^T\right|_{S_H} = 0\,,$$

поэтому интегралы по S_E, S_H и по $\Sigma = S \setminus S_0$ в (1.51) равны нулю. В вариантах А, В имеем соответственно

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^A(x_0) = \int\limits_{S_0} \left(\vec{E}^A\times\vec{\mathscr{H}}^A\right)\cdot d\vec{S}\,, \tag{1.52}$$

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^B(x_0) = -\int\limits_{S_0} \left(\vec{\mathscr{E}}^B\times\vec{H}^B\right)\cdot d\vec{S}\,. \tag{1.53}$$

Вычислив полусуммы левых и правых частей равенства (1.52), (1.53) и воспользовавшись обозначением (1.47), имеем

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^C(x_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{S_0} \left(\left(\vec{E}^A\times\vec{\mathscr{H}}^A\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^B\times\vec{H}^B\right)\right)\cdot d\vec{S}\,, \tag{1.54}$$

Полученное равенство (1.54) строго выражает "усредненное" (в смысле (1.47)) поле излучения апертуры S_0 в любой точке $x \in \Omega_1^+$ через распределение в S_0 тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}^A$, $\vec{H}^B$ и полей точечного источника (электрического диполя) $\vec{\mathscr{E}}^A$, $\vec{\mathscr{H}}^B$, возбуждаемых в области Ω_1^+ с идеальной (в смысле (1.48) или (1.49)) граничной плоскостью S.

Дальнейшее рассмотрение имеет целью некоторое преобразование и интерпретацию формулы (1.54).

Прежде всего представим векторные поля $\vec{\mathscr{E}}^{B}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}^{A}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$, входящие в (1.54), через поле $\vec{\mathscr{E}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$, введенное в п. 1.3.1. Пусть x, $x_0 \in \Omega_1^+$, тогда электромагнитное поле $\vec{\mathscr{E}}$, $\vec{\mathscr{H}}$, где

$$\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) + \vec{\mathscr{E}}_0\left(x \mid x_0', \vec{p}'\right), \tag{1.55}$$

$$\vec{\mathscr{H}} = \vec{\mathscr{H}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) + \vec{\mathscr{H}}_0\left(x \mid x_0', \vec{p}'\right), \tag{1.56}$$

есть поле $\vec{\mathscr{E}}^{B}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}^{B}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$. Чтобы убедится в этом, достаточно лишь проверить выполнение условия (1.49). В силу (1.56), (1.27)

$$\vec{\mathscr{H}} = \vec{\mathscr{H}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) - \vec{\mathscr{H}}_0'\left(x' \mid x_0, \vec{p}\right),$$

откуда при $x \in S$ имеем

$$\left.\vec{\mathscr{H}}^{T}\right|_{S} = 0\,. \tag{1.57}$$

Таким образом, поле (1.55), (1.56) действительно представляет собой поле точечного источника задачи B. Поэтому с учетом (1.26) $\vec{\mathscr{E}}^{B} = \vec{\mathscr{E}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) + \vec{\mathscr{E}}_0^{\,\prime}\left(x' \mid x_0, \vec{p}\right)$, откуда при $x \in S$ получаем

$$\left.\vec{\mathscr{E}}^{B^T}\right|_{S} = 2\left.\vec{\mathscr{E}}_0^{T}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)\right|_{x \in S}. \tag{1.58}$$

Подобным же образом устанавливаем, что

$$\vec{\mathscr{H}}^{A} = \vec{\mathscr{H}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) - \vec{\mathscr{H}}_0\left(x \mid x_0', \vec{p}'\right) = \vec{\mathscr{H}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) + \vec{\mathscr{H}}_0'\left(x' \mid x_0, \vec{p}\right),$$

вследствие чего

$$\left.\vec{\mathscr{H}}^{A^T}\right|_S = 2\,\vec{\mathscr{H}}_0^T\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)\Big|_{x\in S}. \tag{1.59}$$

Объединив результаты (1.54), (1.58), (1.59), получаем, что для любой точки $x_0 \in \Omega_1^+$ и любого вектор-момента $\vec{p}$ имеет место строгое соотношение

$$j\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^C(x_0) = \int\limits_{S_0}\left(\left(\vec{E}^A(x)\times\vec{\mathscr{H}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)\right) - \left(\vec{H}^B(x)\times\vec{\mathscr{E}}_0\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)\right)\right)\cdot d\vec{S}, \tag{1.60}$$

где $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$, $\vec{n}$ – орт нормали к S, направленный в Ω^-.

Итак, усредненное поле, излучаемое апертурой S_0 в полупространство Ω^+, заполненное неоднородной средой и различными рассеивающими объектами (например, содержащее какой-либо обтекатель), выражается формулой (1.60) через распределение в апертуре тангенциальных составляющих векторных полей $\vec{E}^A(x)$, $\vec{H}^B(x)$, возбуждаемых источниками, размещенными в Ω^-, если Σ представляет собой соответственно поверхность идеального проводника или идеального магнетика. Входящее же сюда поле $\vec{\mathscr{E}}^0$, $\vec{\mathscr{H}}^0$ есть электромагнитное поле, возбуждаемое в симметризованной области Ω_1 точечным источником (электрическим диполем) при отсутствии какого-либо материального экрана в плоскости $x_3 = 0$.

Если, например, в Ω^+ размещен лишь некоторый диэлектрический обтекатель G^+ (рис. 1.2), то $\vec{\mathscr{E}}_0$, $\vec{\mathscr{H}}_0$ – поле точечного источника в пространстве, содержащем лишь замкнутую диэлектрическую оболочку (рис. 1.3) симметричную (по геометрии и физическим свойствам) относительно плоскости $x_3 = 0$.

Наконец, сделаем заключительный шаг: от строгой формулы (1.60) перейдем к приближенной, соответствующей приближению физической оптики, когда краевые эффекты в апертуре относительно малы, вследствие чего можно (как это обычно делают в теории и практике антенных расчетов) принять, что в S_0

$$\vec{E}^A(x) \approx \vec{E}^B(x), \qquad \vec{H}^A(x) \approx \vec{H}^B(x).$$

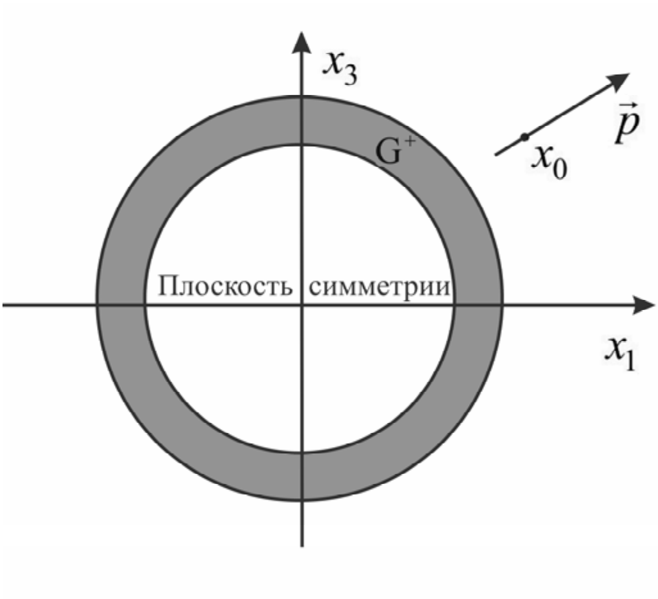

Рис. 1.3. Замкнутая диэлектрическая оболочка

Тогда, опустив индексы *A*, *B* (и сохранив в (1.54) знак обычного равенства, вместо приближенного), имеем

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^C(x_0) = \int\limits_{S_0} \Big(\Big(\vec{E}(x)\times\mathscr{H}_0(x\,|\,x_0,\vec{p})\Big) - \\ -\Big(\vec{H}(x)\times\vec{\mathscr{E}}_0(x\,|\,x_0,\vec{p})\Big)\Big)\cdot d\vec{S}\,. \qquad (1.61)$$

Интеграл в правой части (1.61) выражает поле излучающей апертуры методом эквивалентных токов через непосредственно задаваемые распределения $\vec{E}^T$, $\vec{H}^T$ в апертуре. Отличие от обычно рассматриваемой задачи об излучении апертуры (апертурной антенны) в свободное пространство состоит здесь в том, что $\vec{\mathscr{E}}_0$, $\vec{\mathscr{H}}_0$ в формуле (1.61) есть поле, дифрагированное на симметризованной системе рассеивателей (а не известное в явном виде поле электрического диполя в неограниченном свободном пространстве). Само же равенство (1.61) означает, что и в присутствии неоднородной среды и произвольной системы рассеивателей поле, рассчитанное методом эквивалентных токов (апертурным методом), совпадает – в пределах точности приближения физической оптики – с усредненным полем, формально соответствующим модели Макдональда; таким образом, результат Я.Н. Фельда [13] распространяется на рассматриваемый здесь более общий случай.

В случае, когда неоднородности среды и все рассеиватели в Ω^+ расположены на конечном расстоянии от S_0, из (1.60), (1.61) следуют формулы, выражающие комплексную диаграмму направленности рассматриваемой излучающей системы $\vec{E}\left(\vec{R}^0\right)$, где $\vec{R}^0$ – орт, характеризующий направление на точку наблюдения в дальней (фраунгоферовой) зоне:

$$\vec{p}\cdot\vec{E}\left(\vec{R}^0\right)=\int_{S_0}\left(\left(\vec{E}^A(x)\times\vec{\mathscr{H}}_0\left(x,\vec{R}^0,\vec{p}\right)\right)-\left(\vec{H}^B(x)\times\vec{\mathscr{E}}_0\left(x,\vec{R}^0,\vec{p}\right)\right)\right)\cdot d\vec{S}\,, \quad (1.62)$$

(точная формула);

$$\vec{p}\cdot\vec{E}\left(\vec{R}^0\right)=\int_{S_0}\left(\left(\vec{E}^T(x)\times\vec{\mathscr{H}}_0\left(x,\vec{R}^0,\vec{p}\right)\right)-\left(\vec{H}^T(x)\times\vec{\mathscr{E}}_0\left(x,\vec{R}^0,\vec{p}\right)\right)\right)\cdot d\vec{S}\,, \quad (1.63)$$

(приближенная формула; $\vec{E}^T$, $\vec{H}^T$ – апертурные распределения тангенциальных компонент векторов поля в приближении Кирхгофа).

В формулах (1.62), (1.63) $\vec{\mathscr{E}}_0\left(x,\vec{R}^0,\vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}_0\left(x,\vec{R}^0,\vec{p}\right)$ есть дифрагированное, прошедшее через симметризованную систему рассеивателей поле, возбуждаемое падающей в направлении $\left(-\vec{R}^0\right)$ плоской волной

$$\vec{E}_0 = \left(\vec{R}^0 \times \left(\vec{p} \times \vec{R}^0\right)\right) \, exp\left(-j k_0 \left(\vec{R}^0 \cdot \vec{x}\right)\right),$$
$$\vec{H}_0 = \left(\vec{p} \times \vec{R}^0\right) \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \, exp\left(-j k_0 \left(\vec{R}^0 \cdot \vec{x}\right)\right),$$

где ε_0, μ_0 – проницаемости свободного пространства, k_0 – волновое число свободного пространства.

В заключение отметим, что формулы (1.38) – (1.44), (1.60) – (1.63) имеют не только расчетно-практическое, но и методическое значение: приведенный выше последовательный вывод и физические интерпретации позволяют оценивать пределы их применимости в различных конкретных классах расчетных задач. Несомненно, что использование формулы (1.63) при расчете диаграмм направленности антенных систем с обтекателями предпочтительнее, чем применение таких грубых расчетных схем как, например, известный метод вынесенных раскрывов ("метод фиктивных апертур" [18]).

1.4. Регуляризация решений нестационарных задач рассеяния, получаемых в приближении физической оптики при разнесенном приеме

При расчете методом физической оптики полей, рассеянных гладкими идеально проводящими телами, возникают ошибки, вызванные неадекватностью описания поверхностных токов вблизи терминатора (т.е. границы "свет-тень"). В работе [6] проведено исключение этих "терминаторных разрывов" для весьма частных случаев стационарного рассеяния (совмещенный прием, двумерные задачи либо трехмерные задачи, но в предположении, что терминатор является плоской кривой и притом его плоскость перпендикулярна направлению облучения). В [6] идентифицируются члены, ответственные за возникновение этих реально не существующих разрывов, и в дальнейшем они вычитаются из физоптического интеграла, что заметно улучшает результат. При этом следует отметить, что методика исследований в [6] существенным образом опирается на вышеуказанные весьма ограничительные предположения и неприменима при нарушении каких-либо из них.

Между тем, нетрудно привести примеры гладких замкнутых выпуклых поверхностей с неплоским терминатором.

В качестве примера гладкой выпуклой поверхности с неплоским терминатором рассмотрим поверхность яйцевидной формы (рис. 1.4), задаваемую уравнением:

$$F(x, y, z) = 0\,,$$

где

$$F = y^2 + z^2 - u(x),$$
$$u(x) = \frac{1}{4}(x+3)^2(1-x^2), \quad |x| \le 1\,.$$

Пусть эта поверхность облучается плоской волной с волновым вектором $\vec{k} = (-1; 0; 1)$; тогда уравнениям терминатора

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \vec{k} \cdot grad\, F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

можно придать следующий вид:

$$(T):\ \begin{cases} y = \pm\sqrt{u(x) - v^2(x)}, \\ z = v(x), \end{cases}$$

где $v(x) = \frac{1}{4}(x+3)(2x^2 + 3x - 1)$.

Допустим, что линия (T) принадлежит какой-то плоскости

$$A\,y + B\,z + D\,x + C = 0,$$
$$\left(A^2 + B^2 + D^2 \neq 0\right).$$

Тогда имеем тождество:

$$A^2\left(u - v^2\right) \equiv \left(C + B\,v + D\right)^2 .$$

И так как

$$u(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \ldots\ , \qquad v(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \ldots\ ,$$

то из этого тождества следует: $\frac{1}{4}\left(A^2 + B^2\right)x^6 + \ldots = 0$, откуда $A = B = 0$ и на терминаторе $x \equiv const$, что противоречит уравнениям терминатора (T).

Полученное противоречие позволяет сделать вывод о том, что линия терминатора (T) – неплоская.

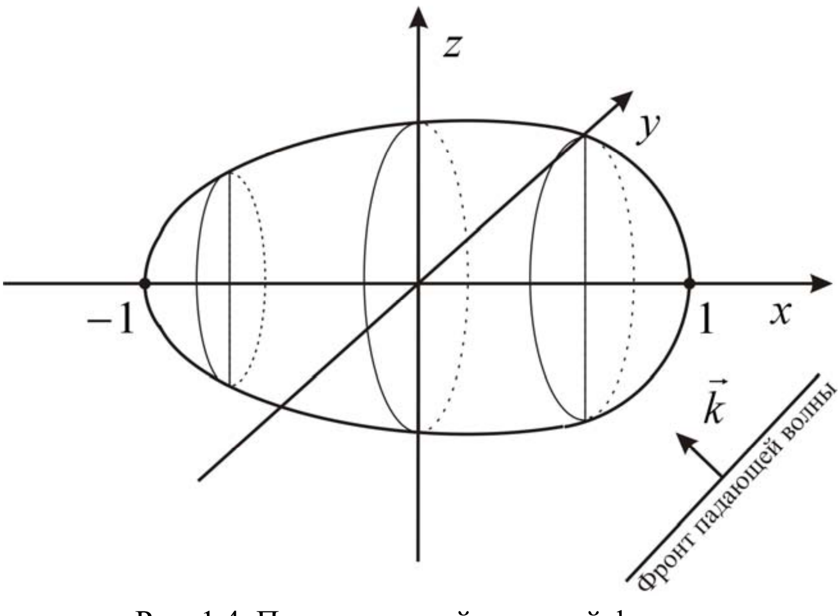

Рис. 1.4. Поверхность яйцевидной формы

Кроме того, даже в случае эллипсоида, при облучении которого в произвольном направлении $\vec{R}^0$ терминатор представляет собой плоскую кривую (эллипс), плоскость терминатора ортогональна к $\vec{R}^0$ лишь при $\vec{R}^0$, параллельном одной из главных осей эллипсоида.

В разделе разрабатывается методика, позволяющая выделить члены, привносимые терминаторным разрывом физоптической плотности тока в асимптотике импульсной характеристики и ее Фурье-образа[1] при разнесенном приеме, произвольно ориентированном относительно направления облучения плоском терминаторе или же при неплоском терминаторе.

Для дальнейшего нам потребуется провести обобщение известной формулы М.И. Конторовича [19, 20], дающей вклад граничного контура в двумерном методе стационарной фазы, на случай неплоской области и невырожденной точки стационарной фазы любого типа (не только эллиптического).

При этом предполагаемый асимптотический метод дает также краевую асимптотику в практически важном случае амплитудной функции с сингулярностью на контуре.

1.4.1. Асимптотика поверхностных интегралов при произвольном типе невырожденной точки стационарной фазы и сингулярной на краевом контуре амплитудной функции

Интегральные представления высокочастотных электромагнитных полей содержат поверхностные интегралы вида

$$I = \iint_S exp\left(j\,k\,\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right)\right)F\left(x_1, x_2, x_3\right)dS \tag{1.64}$$

при $k >> 1$.

[1] Речь идет о высокочастотной асимптотике Фурье-образа импульсной характеристики и о соответствующем асимптотическом представлении импульсной характеристики вблизи волнового фронта.

Если поверхность S незамкнута (например, при дифракции волн на ограниченном экране или излучении апертурной антенны), то асимптотика интеграла I состоит из вкладов, вносимых поверхностными (двумерными) точками стационарной фазы и краевым контуром L. Случай, когда поверхность S есть участок плоскости, а Φ и F – достаточно гладкие функции, исследован в [19, 20]. Примененный здесь метод, опирающийся на интегральные теоремы векторного анализа, позволил выделить вклад стационарной точки только эллиптического типа.

Ниже мы рассмотрим:

а) интеграл по неплоской (в общем случае) поверхности S при гладких фазовой Φ и амплитудной F функциях; получено (строго) асимптотическое представление интеграла (1.64) в виде суммы вкладов от L, а также от изолированной точки стационарной фазы любого типа [21];

б) вклад краевого контура L плоской области S в случае, когда (как это имеет место в практически важных классах задач теории дифракции и теории излучающих систем) амплитудная функция

$$F = \frac{F_0(x_1, x_2)}{d^p(x_1, x_2)}, \qquad 0 < p < 1. \tag{1.65}$$

Здесь функция F_0 непрерывна в $S \cup L$, а $d(x_1, x_2)$ – расстояние от точки $M(x_1, x_2) \in S$ до контура L. Отметим, что метод, применяемый в [20], в такой ситуации непригоден;

в) посредством операционного перехода к оригиналам в полученных коротковолновых асимптотиках выведены асимптотические формулы для некоторых нестационарных полей, действующие вблизи волновых фронтов.

Асимптотика интеграла (1.64) при отсутствии поверхностных точек стационарной фазы и краевых сингулярностей. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ – уравнение поверхности S с достаточно гладким краевым контуром L. Функции f, Φ, F будем считать достаточно гладкими на поверхности S и вблизи нее. Введем орт нормали

$$\vec{n} = \vec{n}(x) = \vec{n}(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla} f \Big/ \left|\vec{\nabla} f\right| \tag{1.66}$$

и тангенциальные дифференциальные операторы $\vec{D} = \nabla - \vec{n}\dfrac{\partial}{\partial n}$, $\vec{D}^{\perp} = \vec{n} \times \vec{D}$.

Предположение об отсутствии точек стационарной фазы на поверхности означает, что $\left|\vec{D}\Phi\right| = \left|\vec{D}^{\perp}\Phi\right| \neq 0$ везде на $S \cup L$.

Введем вектор-функцию

$$\vec{u} = \frac{\vec{D}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{D}^{\perp}\Phi\right|^2} = \frac{\vec{D}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{D}\,\Phi\right|^2}. \tag{1.67}$$

Тогда $\vec{n} \cdot rot\left(exp(jk\Phi)F\vec{u}\right) = jkexp(jk\Phi)F\left(\vec{D}^{\perp}\Phi\vec{u}\right) + exp(jk\Phi)\vec{D}^{\perp}\left(F\vec{u}\right)$, а, с учетом (1.67),

$$jkexp(jk\Phi)F = \vec{n}\, rot\left(exp(jk\Phi)F\frac{\vec{D}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2}\right) - exp(jk\Phi)\vec{D}^{\perp}\left(F\frac{\vec{D}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2}\right). \tag{1.68}$$

Отсюда, в силу интегральной теоремы Стокса,

$$jk\iint_S exp(jk\Phi)F\,dS = \oint_L exp(jk\Phi)F\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{D}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2}dS -$$

$$-\iint_S exp(jk\Phi)\vec{D}^{\perp}\left(F\frac{\vec{D}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{D}\,\Phi\right|^2}\right)dS, \tag{1.69}$$

где $\vec{\tau}$ – орт касательной к L (направление обхода краевого контура L согласовано с ортом нормали к поверхности S, определенным по (1.66)). Заметим (для дальнейшего), что

$$\vec{\tau}\cdot\vec{D}^{\perp}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu},$$

где $\vec{\nu} = \left(\vec{\tau}\times\vec{n}\right)$ – орт нормали к L ,лежащий в плоскости, касательной к S. Соотношению (1.69), таким образом, можно придать следующий вид:

$$I_0 = \frac{1}{jk}K_0 - \frac{1}{jk}I_1. \tag{1.70}$$

Здесь

$$I_0 = \iint\limits_S exp\left(jk\Phi\right)F\,dS; \qquad I_1 = \iint\limits_S exp\left(jk\Phi\right)TF\,dS;$$

$$K_0 = \oint\limits_L \exp\left(jk\Phi\right)F\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right]dS,$$

а $TF = \vec{D}^{\perp}\left(F\dfrac{\vec{D}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2}\right)$ есть некоторый оператор, действующий на функцию F.

Применив многократно преобразование (1.70), получим при любом заданном m, что

$$I_0 = \sum_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^s}{(jk)^{s+1}}K_s + \frac{(-1)^m}{(jk)^m}I_m, \tag{1.71}$$

где K_s, I_m – результаты замены в K_0, I_0 функции F соответственно на $T^sF,\ T^mF$. Из (1.71) следует асимптотическая формула для поверхностного интеграла (1.70) при сделанных выше предположениях:

$$\iint\limits_S exp(jk\Phi)FdS = \oint\limits_L exp(jk\Phi)\left[\left(\frac{d\Phi}{d\nu}\right)\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right]F_m ds + o\left(\frac{1}{k^m}\right), \quad (1.72)$$

где

$$F_m = F_m(x_1, x_2, x_3, k) = \sum_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^s}{(ik)^{s+1}}T^s F\,. \quad (1.73)$$

Пусть, например, эти точки S_1, S_2, ..., S_N и пусть $\Phi''(S_i) \neq 0$, $(i = 1, \ldots, N)$ (это условие можно заменить и более общим предположением). Тогда интеграл в правой части (1.72) может быть представлен в виде

$$\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{2\pi}{k\left|\Phi''(S_i)\right|}}\cdot F_m(S_i)\left(\frac{\partial\Phi/\partial\nu}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2}\right)_{S=S_i}\cdot$$
$$\cdot exp\left(jk\Phi(S_i) + \frac{j\pi}{4}sgn\,\Phi''(S_i)\right).$$

Контурный интеграл в (1.72) при необходимости может быть заменен суммой вкладов от заведомо существующих контурных точек стационарной фазы. Если на каком-то простом замкнутом контуре, входящем в краевой контур L, имеем $0 \leq S \leq S_{max}$, то $\Phi\big|_{s=s_{max}} = \Phi\big|_{s=0}$, а поэтому в промежутке $0 \leq S \leq S_{max}$ есть точки, в которых $d\Phi/ds = 0$.

Метод "нейтрализаторов", локализация асимптотических вкладов. Будем считать поверхность S и ее краевой контур L бесконечно гладкими, а функции f, F, Φ бесконечно дифференцируемыми на и вблизи поверхности S, причем везде на $S \cup L$ $\nabla f \neq 0$, а $\vec{D}\Phi = 0$ в одной лишь точке

$M_0(x_0) = M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, расположенной на поверхности S на расстоянии $R > 0$ от краевого контура L.

После перехода к декартовой системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с началом в точке $M_0(x_0)$ и осью $M_0\xi_3$, имеющей направление орта нормали $\vec{n}\,(x_0)$, получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad F(x_1, x_2, x_3) = \hat{F}(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$
$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \hat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Поверхность S согласно [22] (при $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3} \xi_i^2} < R_0$, где R_0 достаточно малое, и $R_0 < R$) описывается уравнением вида $\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2)$. В точке M_0 имеем $g = 0$, $g_{\xi_1} = g_{\xi_2} = 0$. Введем функцию $\gamma(\rho)$ – "нейтрализатор", бесконечно гладкую на полуоси $0 \le \rho < +\infty$, причем

$$\gamma(\rho) = \begin{cases} 1, & 0 \le \rho \le \varepsilon_0 \\ 0, & \rho \ge \varepsilon_1 \end{cases},$$

где $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < R_0$.

Произведем "разбиение единицы" $1 = \gamma(\rho) + [1 - \gamma(\rho)]$ в интеграле I

$$I = \iint\limits_S exp(jk\Phi) F_1 dS = J_1 + J_0. \qquad (1.74)$$

Здесь $J_1 = \iint\limits_{S_1} exp(j\,k\Phi) F_1 dS$, $S_1 = S \cap \{|\vec{x} - \vec{x}_0| \le \varepsilon_1\}$, $F_1 = F\gamma$, $J_0 = \iint\limits_{S_0} exp(j\,k\Phi) F_0 dS$, $S_0 = S \cap \{|\vec{x} - \vec{x}_0| \ge \varepsilon_0\}$, $F_0 = F(1 - \gamma)$.

Краевой контур поверхности S_0 состоит из линии L и линии пересечения L_0 сферы $|\vec{x}-\vec{x}_0|=\varepsilon_0$ с S. Функция F_0 и все ее производные равны нулю на линии L_0, а на линии L совпадают с соответствующими значениями функции F и ее производных. К тому же на $S_0 \bigcup L \bigcup L_0$ нет поверхностных точек стационарной фазы, поэтому, в силу результатов, полученных ранее,

$$J_0=\oint\limits_L exp\left(jk\Phi\right)\left[\left(\frac{d\Phi}{d\nu}\right)\Big/\left|\vec{D}\,\Phi\right|^2\right]F_m ds+o\left(\frac{1}{k^m}\right), \tag{1.75}$$

где F_m представлено формулой (1.73).

Переходим к асимптотике интеграла J_1. Так как $\varepsilon_1 < R_0$, то поверхность S_1 имеет уравнение $\xi_3 = g(\xi_1,\xi_2)$, а ее краевой контур L_1 есть пересечение поверхности S со сферой $|\vec{x}-\vec{x}_0|=\varepsilon_1$. Обозначим через L_1', S_1' соответственно проекции контура и поверхности на координатную плоскость (ξ_1,ξ_2). Тогда

$$J_1=\iint\limits_{S_1'} exp\left(jk\overline{\Phi}\right)\overline{F}_1 dS_1' \ , \tag{1.76}$$

где $\quad \overline{\Phi}(\xi_1,\xi_2)=\hat{\Phi}(\xi_1,\xi_2,g(\xi_1,\xi_2))$,

$\overline{F}_1(\xi_1,\xi_2)=\gamma(\overline{\rho})\hat{F}(\xi_1,\xi_2,g(\xi_1,\xi_2))\sqrt{1+g_{\xi_1}^2+g_{\xi_2}^2}\ ,\ \overline{\rho}=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+g^2(\xi_1,\xi_2)}$.

Множитель $\gamma(\overline{\rho})$ на контуре L_1' обращает функцию $\overline{F}_1$ и все ее частные производные сколь угодно высокого порядка в нуль при $\overline{\rho}=\varepsilon_1$. При этих условиях и в предположении невырожденности точки стационарной фазы M_0 двойной интеграл в (1.76) допускает [23, 24] асимптотическое разложение вида

$$J_1 \sim k^{-1} exp\left[jk\Phi(M_0)\right]\sum_{m=0}^{+\infty} a_m k^{-m} \ . \qquad (1.77)$$

В главном асимптотическом приближении интеграл

$$J_1 = \frac{2\pi}{k} exp\left(jk\Phi(M_0)\right)\left[\frac{exp\left((j\pi/4) sgn\,\overline{\mathbf{\Phi}}\right)}{\sqrt{\left|det\,\overline{\mathbf{\Phi}}\right|}} F(M_0) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right], \qquad (1.78)$$

где $\overline{\mathbf{\Phi}} = \begin{bmatrix} \overline{\Phi}_{\xi_1^2} & \overline{\Phi}_{\xi_1\xi_2} \\ \overline{\Phi}_{\xi_1\xi_2} & \overline{\Phi}_{\xi_2^2} \end{bmatrix}$, а $sgn\,\overline{\mathbf{\Phi}} = \mu^+ - \mu^-$ – разность между количествами положительных и отрицательных собственных значений λ_1, λ_2 матрицы $\overline{\mathbf{\Phi}}$. В эллиптическом случае ($\lambda_1\lambda_2 > 0$) $sgn\,\overline{\mathbf{\Phi}} = \pm 2$, в гиперболическом ($\lambda_1\lambda_2 < 0$) – $sgn\,\overline{\mathbf{\Phi}} = 0$.

Элементы матрицы $\overline{\mathbf{\Phi}}$ допускают (это можно установить) следующее выражение через производные функции $\hat{\Phi}$, $\hat{f}$ по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3 в точке $M_0(0,0,0)$ при всех $l,m = 1,2$

$$\left(\overline{\Phi}_{\xi_l\xi_m}\right)_{\xi_1=\xi_2=0} = \hat{f}_{\xi_3}^{-1}\left[\hat{\Phi}_{\xi_l\xi_m}\hat{f}_{\xi_3} - \hat{f}_{\xi_l\xi_m}\hat{\Phi}_{\xi_3}\right]_{M_0} . \qquad (1.79)$$

Таким образом, для представления интеграла J_1 по (1.78) нет необходимости решать относительно ξ_3 уравнение $\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ и находить явное выражение функции $g(\xi_1, \xi_2)$.

Итак, асимптотика интеграла I локализована во вкладах, вносимых краем L поверхности S (1.76) и точкой стационарной фазы M_0 (1.78), (1.79). Этот результат распространяется на случай нескольких поверхностных точек стационарной фазы. Кроме того, примененный выше метод "нейтрализаторов" позволяет, опираясь на результаты, приведенные в [23–25], получать и асимптотические вклады изолированных точек стационарной фазы в различных случаях вырождения. Например, если после надлежащего поворота системы координат $\hat{f}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=0$ вокруг оси $M_0\xi_3$ фазовая функция имеет (вблизи точки M_0) разложение

$$\overline{\Phi}(\xi_1,\xi_2)=\Phi(M_0)+\lambda_1\xi_1^2+\sum_{\substack{p+q\geq 3\\ p,q\geq 0}}\lambda_{pq}\xi_1^p\xi_2^q ,$$

и если $\lambda_1\neq 0, \lambda_{03}\neq 0$, то [25]

$$J_1\sim\frac{1}{\sqrt{3}}exp\left(jk\Phi(M_0)\right)F(M_0)\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)exp\left(j\pi/4\right)sgn\,\lambda_1}{\sqrt{|\lambda_1|}\sqrt[3]{|\lambda_{03}|}k^{5/6}} . \qquad (1.80)$$

Если рассматривать интеграл I как спектральное изображение, то его оригиналом будет служить интеграл

$$\bar{I}=\iint_S \delta\left(t-\Phi(\vec{x})\right)F(\vec{x})dS .$$

Применяя обратное преобразование Фурье к правой части соотношения (1.74) (с учетом (1.75), (1.77)), получим лучевое разложение для $\bar{I}$ тем более точное, чем величина $\left|t-\Phi(\vec{x})\right|$ ближе к нулю. Главный член этого разложения имеет вид:

$$\bar{I}=\iint_S \delta\left(t-\Phi(\vec{x})\right)F(\vec{x})dS \sim -j2\pi\, exp\left(j\frac{\pi}{4}sgn\overline{\mathbf{\Phi}}\right)\frac{F(M_0)}{\sqrt{\left|det\overline{\mathbf{\Phi}}\right|}}\chi\left(t-\Phi(\vec{x})\right)-$$

$$-\int_L \chi\left(t-\Phi(\vec{x})\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right]F(\vec{x})dS . \qquad (1.81)$$

Здесь M_0 – точка стационарной фазы (точка, в которой $\vec{D}\Phi=0$) на поверхности S; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\chi(t)$ – единичная функция Хевисайда. Таким образом, формулу (1.81) можно рассматривать как нестационарный аналог полученного в разделе обобщения формулы М. И. Конторовича [20].

Асимптотика интегралов с краевой особенностью. К интегралам с краевой особенностью приводит решение ряда задач электродинамики. Например, таких:

1. Пусть отыскивается полное дифрагированное поле $\vec{H}(x)$ от первичной волны $\vec{H}_0(x)$, падающей на плоский идеально проводящий бесконечно тонкий экран S, ограниченный контуром L. В таком случае из формулы Грина [26] следует интегральное представление вектора магнитной напряженности поля в любой точке $\vec{x}_0$, не расположенной на экране:

$$\vec{H}(\vec{x}_0)=\vec{H}_0(\vec{x}_0)+\iint_S\left(\vec{\nabla}g\times\vec{J}(\vec{x})\right)dS\,. \tag{1.82}$$

Здесь $\vec{J}(\vec{x})$ – плотность поверхностного тока, $g=g(\vec{x}_0,\vec{x})=exp(jkr)/(4\pi r)$, $r=|\vec{x}_0-\vec{x}|$, а рассеянное поле имеет вид

$$\vec{H}(\vec{x}_0)-\vec{H}_0(\vec{x}_0)=\iint_S exp(jk\Phi)\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{x})\,dS\,,^1 \tag{1.83}$$

при фазовой функции $\Phi=\Phi(\vec{x}_0,\vec{x})=r$.

2. К интегралам вида (1.83) с той же фазовой функцией приводит излучение апертурной антенны в математически строгой модели [15, 16].

В каждом из приведенных примеров действует физически необходимое условие на ребре, обеспечивающее конечность энергии в окрестности излома поверхности [26]. Вследствие этого у амплитудной функции F допустима на бесконечно тонком краю сингулярность, т.е. $F=F_0/\sqrt{d}$, где F_0 непрерывна в окрестности

[1] Не ограничивая общности, везде далее будем под F понимать какую-либо компоненту вектора $\vec{F}$. Под k будем понимать безразмерный параметр, равный произведению волнового числа k_0 на характерный размер экрана.

краевого контура, а $d{=}d\left(x_1,x_2\right)$ – расстояние точки области S от краевого контура.

В более общем случае изломов с внутренними углами $\theta\in\left[0,\pi\right]$ – $F{=}F_0\big/d^{\,p}$, $p{=}(\pi{-}\theta)/2\pi\in\left[0,1/2\right]$.

Метод получения коротковолновых асимптотик при наличии краевых сингулярностей излагается ниже применительно к интегралу P по плоской строго выпуклой области S с достаточно гладкими краевым контуром L и функцией F_0:

$$P{=}\iint\limits_S exp\left(jkr\right)\frac{F_0\left(\vec{x}\right)}{\sqrt{d\left(\vec{x}\right)}}dS\,, \tag{1.84}$$

где $r=\sqrt{\left(x_1^0{-}x_1\right)^2{+}\left(x_2^0{-}x_2\right)^2{+}h^2}$, ($h = x_3^0 \neq 0$).

Точка $M_0\left(x_1^0,x_2^0,0\right)\in S$ находится от краевого контура L на расстоянии $R_1 > 0$. Тогда комплексная диаграмма направленности

$$Q{=}\iint\limits_S exp\left(-\,jk\left(\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right)\right)\frac{F_0\left(\vec{x}\right)}{\sqrt{d\left(\vec{x}\right)}}dS\,, \tag{1.85}$$

где $\vec{R}^0{=}\left(0,-cos\psi,sin\psi\right)$.

Исследовать интеграл P удобно, задав краевой контур L уравнением в полярных координатах (ρ,θ) с полюсом в точке M_0:

$$\rho=\omega\left(\theta\right),\qquad 0\le\theta\le 2\pi\,. \tag{1.86}$$

В этом случае (можно обосновать) амплитудная функция в интеграле P представима отношением вида $F_1\left(\rho,\theta\right)\big/\sqrt{\omega\left(\theta\right)-\rho}$ с числителем, не имеющим особенностей. Получим

$$P{=}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\omega(\theta)}exp\left(jk\sqrt{\rho^2{+}h^2}\right)\frac{F_1\left(\rho,\theta\right)\rho\,d\rho}{\sqrt{\omega\left(\theta\right)-\rho}}\,. \tag{1.87}$$

Преобразуем интеграл P к новой переменной интегрирования $r=\sqrt{\rho^2+h^2}$:

$$P=\int_0^{2\pi} d\theta \int_h^{\Omega} exp(jkr)(\Omega-r)^{-1/2} Grdr\,, \qquad (1.88)$$

где $\Omega=\Omega(\theta)=\sqrt{\omega^2(\theta)+h^2}$,

$$G=G(r,\theta)=F_1\left(\sqrt{r^2-h^2},\theta\right)\left[\frac{\omega(\theta)+\sqrt{r^2-h^2}}{\Omega(\theta)+r}\right]^{1/2}.$$

Введем при $h\le r\le\Omega(\theta)$ бесконечно дифференцируемые по r (при каждом θ) нейтрализаторы $\gamma_0(r,\theta)$, $\gamma_1(r,\theta)$, такие, что $\gamma_1=1-\gamma_0$, $\gamma_0(r,\theta)=\begin{cases}1, & h\le r\le\varepsilon_1\\ 0, & \varepsilon_0\le r\le\Omega(\theta)\end{cases}$ ($h<\varepsilon_1<\varepsilon_0<\min\limits_{0\le\theta\le2\pi}\Omega(\theta)$). При условии $1=\gamma_0(r,\theta)+\gamma_1(r,\theta)$ получим $P=P_0+P_1$.

Рассмотрим асимптотику интеграла P. Вклад точки стационарной фазы $\rho=0$ ($r=h$) таков:

$$P_0=\int_0^{2\pi} d\theta \int_h^{\varepsilon_0} exp(jkr)(\Omega-r)^{-1/2} G\gamma_0 rdr. \qquad (1.89)$$

Так как функция $G_0(r,\theta)=(\Omega-r)^{-1/2}G\gamma_0 r$ при каждом θ непрерывна по $r\in[h,\varepsilon_0]$ вместе со своими производными (они равны нулю при $r=\varepsilon_0$), то интегрирование по частям приводит к соотношению

$$P_0=\sum_{m=1}^{N}\frac{(-1)^m exp(jkh)}{(jk)^m}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{m-1}G_0(h,\theta)}{\partial r^{m-1}}d\theta+O\left(\frac{1}{k^{N+1}}\right). \qquad (1.90)$$

В главном приближении

$$P_0 = -\frac{h\,exp\left(jkh\right)}{jk} F_1\left(M_0\right) \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\omega(\theta)}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{1.91}$$

При асимптотическом разложении интеграла

$$P_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\,\theta \int\limits_{\varepsilon_1}^{\Omega} exp\left(jkr\right)\left(\Omega - r\right)^{-1/2} G\gamma_1 r dr \tag{1.92}$$

к цели приводит интегрирование по частям во внутреннем интеграле. Однако, вследствие сингулярности функции $\left(\Omega - r\right)^{-1/2}$ в точке $r = \Omega$, дифференцировать ее под знаком интеграла недопустимо и, вместо e^{jkr}/jk, $\mathrm{e}^{jkr}/\left(jk\right)^2$, … нужно применить последовательность первообразных специального вида от произведения $\mathrm{e}^{jkr}\left(\Omega - r\right)^{-1/2} = U_0\left(r,\theta\right)$, т.е. применить последовательность функций

$$U_m\left(r,\theta\right) = \frac{\left(-1\right)^m}{\left(m-1\right)!} \int\limits_r^{+j\infty} \left(t - r\right)^{m-1} exp\left(jkt\right)\left(\Omega - t\right)^{-1/2} dt\,,\ (m = 1,2,\ldots), \tag{1.93}$$

обладающих следующими свойствами:

1. $\dfrac{\partial U_m\left(r,\theta\right)}{\partial r} = U_{m-1}\left(r,\theta\right), \quad (m = 1,2,\ldots),$

2. $U_m\left(\Omega,\Omega\right) = \dfrac{\left(-1\right)^m}{\left(m-1\right)!} exp\left(\pi\, j\left(m + 1/2\right)/2\right) \dfrac{\Gamma\left(m - 1/2\right)}{k^{m-1/2}} exp\left(jk\,\Omega\right),$

3. $\left|U_m\left(r,\Omega\right)\right| \le \dfrac{1}{\left(m-1\right)!} \dfrac{\Gamma\left(m-1/2\right)}{k^{m-1/2}}, \quad (h \le r \le \Omega).$

Из этих свойств вытекает асимптотическое разложение

$$P_1 = \sum_{m=1}^{N} \frac{(-1)^{m-1} exp(-j\pi(m-1/2)/2)\Gamma(m-1/2)}{k^{m-1/2}} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} exp(jk\Omega)\Psi_{m-1}(\theta)\,d\theta + O\left(\frac{1}{k^{N+1/2}}\right), \tag{1.94}$$

где $\Psi_{m-1}(\theta) = \left.\frac{\partial^{m-1}[G(r,\theta)r]}{\partial r^{m-1}}\right|_{r=\Omega(\theta)}$.

В главном приближении

$$P_1 = \frac{exp(-j\pi/4)\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} exp(jk\Omega)F_1(\omega,\theta)\sqrt{\omega\Omega}\,d\theta + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Теперь рассмотрим асимптотическое представление интеграла Q (1.85). Ограничимся случаем краевого контура L, симметричного относительно одной из осей координат, и получим лишь первые два члена асимптотического разложения.

Пусть в системе координат (x, y) L задается уравнениями $x = \pm w(y)$ ($a \le y \le b$) и вблизи точек a, b $w(y)$ имеет асимптотики

$$w(y) \sim \begin{cases} p(y)\sqrt{y-a}, & (y \to a+0) \\ q(y)\sqrt{b-y}, & (y \to b-0) \end{cases}.$$

При этом $p(y)$, $q(y)$, $w^2(y)$ – достаточно гладкие функции соответственно в $[a, a+\varepsilon)$, $(b-\varepsilon, b]$, $[a,b]$ (при $\varepsilon < (b-a)/2$).

Амплитудную функцию в (1.85) можно представить как отношение вида $f(x,y)\big/\sqrt{w^2(y)-x^2}$, в котором $f(x,y)$ не имеет сингулярностей. Предположим, что эта функция достаточно гладкая в $S \cup L$. После несложных преобразований получим

$$Q = \int_a^b exp\left(j\bar{k}\,y\right)U\left(y\right)dy, \quad \left(\bar{k} = kcos\psi\right), \tag{1.95}$$

$$U\left(y\right) = \int_{-1}^{1} f\left(\xi w\left(y\right), y\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{1.96}$$

$$U'\left(y\right) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial f\left(\xi w\left(y\right), y\right)}{\partial y}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{dw^2\left(y\right)}{dy}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 f\left(\theta\,\xi\, w\left(y\right), y\right)}{\partial x^2}\frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \ \left(0<\theta<1\right). \tag{1.97}$$

Из (1.96), (1.97) следует, что

$$U\left(a\right) = f\left(0,a\right)\pi, \quad U\left(b\right) = f\left(0,b\right)\pi,$$

$$U'\left(a\right) = \left(\frac{\partial\, f\left(0,a\right)}{\partial\, y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\, f\left(0,a\right)}{\partial\, x^2}A\right)\pi, \tag{1.98}$$

$$U'\left(b\right) = \left(\frac{\partial\, f\left(0,b\right)}{\partial\, y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\, f\left(0,b\right)}{\partial\, x^2}B\right)\pi,$$

где $A = \lim\limits_{y\to a+0}\left[\frac{w\left(y\right)}{\sqrt{y-a}}\right]^2$, $B = \lim\limits_{y\to b-0}\left[\frac{w\left(y\right)}{\sqrt{b-y}}\right]^2$.

Двукратное интегрирование по частям в (1.95) приводит к следующей асимптотической формуле

$$Q = \pi\, exp\left(j\bar{k}b\right)\left[\frac{1}{j\bar{k}}f\left(0,b\right) - \frac{1}{\left(j\bar{k}\right)^2}\left(\frac{\partial f\left(0,b\right)}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f\left(0,b\right)}{\partial x^2}B\right)\right] -$$

$$-\pi\, exp\left(j\bar{k}a\right)\left[\frac{1}{i\bar{k}}f\left(0,a\right) - \frac{1}{\left(j\,\bar{k}\right)^2}\left(\frac{\partial f\left(0,a\right)}{\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f\left(0,a\right)}{\partial x^2}A\right)\right] + O\left(\frac{1}{\bar{k}^3}\right).$$

(1.99)

Таким образом, полученное асимптотическое представление интеграла Q имеет дискретный характер и состоит из вкладов от окрестностей точек $(0,a)$, $(0,b)$ краевого контура. Такое явление хорошо известно в теории коротковолновой дифракции и связано с концепцией "блестящих точек" в радиолокации.

Методы, близкие к примененным выше для вычисления интегралов P, Q, позволяют получить асимптотические представления интегралов с другими фазовыми функциями и другими типами краевых сингулярностей.

Применим полученное обобщение формулы Конторовича (1.81) к решению задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем гладком выпуклом теле (в приближении физической оптики).

1.4.2. Импульсная характеристика идеально проводящего гладкого выпуклого тела в двухпозиционном случае (метод физической оптики). Исключение терминаторных разрывов

Воспользовавшись асимптотическим соотношением (1.99), можно получить представление импульсной характеристики идеально проводящего гладкого выпуклого тела в общем случае бистатической локации.

Пусть на объект с поверхностью S падает плоская монохроматическая электромагнитная волна

$$\vec{E}^0 = \vec{p}\, exp\left(j\, k_0 \left(a + \vec{R}^0 \cdot \vec{x}\right)\right),$$

$$\vec{H}^0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec{R}^0 \times \vec{p}\right) exp\left(j\, k_0 \left(a + \vec{R}^0 \cdot \vec{x}\right)\right). \qquad (1.100)$$

Здесь a – расстояние от плоскости нулевой фазы до выбранного начала координат, $\vec{p}$ – орт поляризации, $\vec{R}^0$ – волновой орт падающей волны.

Операционным оригиналом поля (1.100) является импульсная плоская волна

$$\vec{\mathscr{E}}^{0}\left(t,\vec{x}\middle|\vec{R}^{0}\right)=\vec{p}\,\delta\left(t-a-\vec{R}^{0}\cdot\vec{x}\right),$$

$$\vec{\mathscr{H}}^{0}\left(t,\vec{x}\middle|\vec{R}^{0}\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec{R}^{0}\times\vec{p}\right)\delta\left(t-a-\vec{R}^{0}\cdot\vec{x}\right). \qquad (1.101)$$

Поле, рассеянное телом в направлении орта $\vec{r}^{\,0}$ при облучении волной (1.100), может быть представлено в виде:

$$\vec{H}^{pac}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\approx\frac{exp\left(\,j\,k_0\,r\,\right)}{4\pi r}\,j\,k_0\iint\limits_S\left(\vec{H}^{\perp}\times\vec{r}^{\,0}\right)exp\left(-\,j\,k_0\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\right)dS\,,$$

где $\vec{H}$ – полное поле на поверхности S. Приближение физической оптики дает следующее выражение для рассеянного поля:

$$\vec{H}^{pac}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\approx j\,k_0\iint\limits_{S_{осв}}exp\left(\,j\,k_0\,\varPhi\,\right)\vec{A}\,dS\,, \qquad (1.102)$$

где $S_{осв}$ – часть поверхности объекта, "освещенная" волной (1.100),

$$\vec{A}=\frac{1}{2\pi r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec{n}\times\left(\vec{R}^{0}\times\vec{p}\right)\right)\times\vec{r}^{\,0}\,,\quad \varPhi=a+r+\left(\vec{R}^{0}-\vec{r}^{\,0}\right)\cdot\vec{x}\,.$$

Импульсная же характеристика объекта является оригиналом, спектральное изображение которого в высокочастотном приближении представляется выражением (1.102):

$$\vec{\mathscr{H}}^{pac}\left(t,\vec{x}\,\middle|\,\vec{r}^{\,0}\right)\approx-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{осв}}\delta\left(t-\varPhi\left(\vec{x}\right)\right)\vec{A}\,dS\,. \qquad (1.103)$$

Таким образом, выражение для импульсной характеристики может быть получено с помощью формулы (1.99) простым дифференцированием по t.

Попутно получим представление для оценки решения стационарной задачи дифракции, описываемого выражением (1.102).

Оценим вначале вклад точки стационарной фазы. Точка стационарной фазы M_0 определяется равенством: в точке M_0

$$\vec{D}\Phi = \left(\vec{R}^0 - \vec{r}^{\,0}\right)^T = \vec{R}^{0^T} - \vec{r}^{\,0^T} = 0$$

или

$$\vec{R}^0 \cdot \vec{n} = -\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – нормаль к $S_{осв}$ в точке стационарной фазы M_0.

Введем в окрестности точки M_0 локальную систему координат ξ_1, ξ_2, ζ, описанную в п. 1.4.1 (здесь $\zeta = \xi_3$). Вблизи точки M_0 на $S_{осв}$

$$\zeta = -\left(\frac{a_{11}}{2}\xi_1^2 + a_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + \frac{a_{22}}{2}\xi_2^2\right) + o\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right),$$

то есть с точностью до членов высшего порядка малости

$$\zeta = -\frac{1}{2}\vec{\xi}'A\vec{\xi}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В этом случае вблизи M_0

$$\overline{\Phi}\left(\xi_1,\xi_2\right) = a + r + l_1^0\,\xi_1 + l_2^0\,\xi_2 - \frac{1}{2}\left(\vec{l}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right)\left(\vec{\xi}'A\vec{\xi}\right),$$

где $\vec{l}^{\,0} = \vec{R}^0 - \vec{r}^{\,0}$, так что

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \xi_i \, \partial \xi_k} \right)_{M_0} = -\frac{1}{2} \left(\vec{l}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0} \right) a_{ik} ,$$

$$\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} = -\frac{1}{2} \left(\vec{l}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0} \right) A .$$

Учитывая, что

$$\left(\vec{l}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0} \right) = 2 \left(\vec{R}^0 \cdot \vec{n}_{M_0} \right) = -2 \left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0} \right),$$

получим

$$\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} = \left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0} \right) A .$$

Так как $\vec{n}_{M_0}$ – орт внешней нормали к $S_{осв}$, то очевидно, что $\left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0} \right) > 0$.

Пусть λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы A. Тогда

$$sgn \, \overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} = sgn \, A ,$$

$$\left| \, det \, \overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} \right| = \left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0} \right)^2 \left| \, det \, A \right| = \left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0} \right)^2 \left| \lambda_1 \lambda_2 \right| .$$

Далее, при надлежащем повороте системы координат вокруг оси ζ получаем уравнение $S_{осв}$ вблизи M_0

$$\zeta = -\frac{1}{2} \left(\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 \right) + \ldots ,$$

откуда следует, что λ_1, λ_2 – главные кривизны $S_{осв}$ в точке M_0:

$$\lambda_1 = æ_1 , \;\; \lambda_2 = æ_2 ;$$

$$\left| det\,\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} \right| = cos^2\left(\vec{r}^{\,0},\, \vec{n}_{M_0}\right) \cdot \left| æ_1\, æ_2 \right|.$$

Для дальнейшего необходимо предположить, что $æ_1\, æ_2 \neq 0$. В частности, если S вблизи точки M_0 является строго выпуклой, то $æ_1 > 0$, $æ_2 > 0$ и

$$\left| det\;\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} \right| = æ_1\, æ_2\, cos^2\left(\vec{r}^{\,0}, \vec{n}_{M_0}\right),$$

$$sgn\;\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} = 2\,.$$

Если же M_0 – седловая точка, то $æ_1 æ_2 < 0$, $sgn\,\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} = 0$. Ради определенности, дальнейшее рассмотрение проводится для случая $æ_1 > 0$, $æ_2 > 0$. Воспользовавшись формулой (1.78), получим вклад точки стационарной фазы в рассеянное поле:

$$\vec{H}^{\,рас}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\Big|_{\,ст.ф.} \sim -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\left[\vec{n}_{M_0} \times \left(\vec{R}^{0} \times \vec{p}\right)\right] \times \vec{r}^{\,0}}{r\sqrt{æ_1\, æ_2}\,\left|cos\left(\vec{r}^{\,0}, \vec{n}_{M_0}\right)\right|} \cdot$$
$$\cdot exp\left(j\,k\left(a + r + \vec{l}^{\,0} \cdot \vec{x}_{M_0}\right)\right). \qquad (1.104)$$

Границей поверхности $S_{осв}$ является терминатор L – линия, определяющая границу "свет-тень". Оценим ее вклад в асимптотику рассеянного поля, воспользовавшись формулой (1.75):

$$\left(\vec{H}^{\,рас}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.Г} \sim \int\limits_{L} e^{j\,k\,\Phi}\,\vec{A}\,\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu}}{\left|\vec{D}\,\Phi\right|^2}\,d\,l\,. \qquad (1.105)$$

Здесь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{l}^{\,0} \cdot \vec{\nu} = \vec{l}^{\,0} \cdot \left(\vec{\tau} \times \vec{n}\right),$$

$$\left|\vec{D}\Phi\right|^2 = \left|\vec{l}^{\,0T}\right|^2 = \left|\vec{l}^{\,0}\right|^2 - \left(\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{n}\right)^2.$$

Допустим, что контур L задан параметрически:

$$\vec{x} = \vec{x}(t).$$

Тогда контурные точки стационарной фазы определяются из уравнения

$$\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}'(t) = 0$$

и пусть это точки – $M_i\left(i = 1,\ldots,N\right)$. Тогда интеграл в (1.105) может быть вычислен асимптотически:

$$\left(\vec{H}^{pac}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.L} \sim \sum_{m=1}^{N}\sqrt{\frac{2}{k\left|\vec{l}^{\,0}\cdot\left(\dfrac{d\vec{\tau}}{dS}\right)_{M_m}\right|}}\cdot\left(\vec{A}\right)_{M_m}\frac{\left(\vec{l}^{\,0}\,\vec{\tau}\,\vec{n}\right)_{M_m}}{\left|\vec{l}^{\,0}\right|^2 - \left(\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{n}_{M_m}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\, exp\left(jk\left(a + r + \vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_m}\right) + \frac{j\pi}{4}sgn\left(\vec{l}^{\,0}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dS}\right)_{M_m}\right). \qquad (1.106)$$

Здесь учтено, что

$$\left(\Phi''(l)\right)_{M_m} = \vec{l}^{\,0}\cdot\left(\frac{d\vec{\tau}}{dS}\right)_{M_m},$$

где

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{\left|\vec{x}'(t)\right|}, \quad \frac{d\vec{\tau}}{dS} = \vec{\tau}'(t)\frac{dt}{dS} = \frac{\vec{\tau}'(t)}{\left|\vec{x}'(t)\right|}.$$

Таким образом, объединив формулы (1.104) и (1.105), получим

$$\vec{H}^{pac}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right) \sim -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\left[\vec{n}_{M_0}\times\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)\right]\times\vec{r}^{\,0}}{r\cdot\sqrt{\left|æ_1\,æ_2\right|}\,\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{n}_{M_0}\right)}\times$$

$$\times exp\left(j\,k\left(a+r+\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_0}\right)\right)+\int\limits_L e^{jk\Phi}\,\vec{A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right)d\,l\,. \qquad (1.107)$$

Формула (1.107) дает решение стационарной задачи дифракции при облучении идеально проводящего гладкого выпуклого тела плоской волной (1.100).

Выражение же импульсной характеристики рассматриваемого объекта (рассеянного поля, получаемого в результате нестационарного импульсного облучения объекта полем (1.101)) может рассматриваться как оригинал, спектральное изображение которого дается формулой (1.107):

$$\vec{\mathscr{H}}^{pac}\left(t,\vec{x}\,\middle|\,\vec{r}^{\,0}\right) \sim -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\left[\vec{n}_{M_0}\times\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)\right]\times\vec{r}^{\,0}}{r\cdot\sqrt{\left|æ_1\,æ_2\right|}\,\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{n}_{M_0}\right)}\,\delta\left(t-a-r-\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_0}\right)+$$

$$+\int\limits_L \delta\left(t-a-r-\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\vec{A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right)d\,l. \qquad (1.108)$$

Таким образом, в полученном физоптическом приближении импульсной характеристики нами выделены члены, ответственные за появление "терминаторных" разрывов, вызванных неадекватным описанием плотности поверхностного тока вблизи границы "свет-тень" в приближении физической оптики. Полученное решение стационарной задачи дифракции, по аналогии с [6], можно улучшить вычитая из полученного физоптического решения главные члены "терминаторной" асимптотики, описываемые соотношением (1.106).

Сглаживание импульсной характеристики (1.108) может быть проведено путем вычитания из правой части (1.108) операционного оригинала, соответствующего изображению $\left(\vec{H}^{рас}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.L}$:

$$\mathscr{H}^{рас}\left(t,\vec{x}\,\middle|\,\vec{r}^{\,0}\right)\Big|_{Вкл.L} \sim \sum_{m=1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\left|\vec{l}^{\,0}\cdot\left(\frac{d\,\vec{\tau}}{d\,S}\right)_{M_m}\right|}}\times$$

$$\times\left(\vec{A}\right)_{M_m}\frac{\left(\vec{l}^{\,0}\,\vec{\tau}\,\vec{n}\right)_{M_m}}{\left|\vec{l}^{\,0}\right|^2-\left(\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{n}_{M_m}\right)^2}\cdot exp\left(j\frac{\pi}{4}\left(sgn\left(\vec{l}^{\,0}\cdot\frac{d\,\vec{\tau}}{d\,S}\right)_{M_m}-1\right)\right)\times$$

$$\times\frac{\chi\left(t-a-r-\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_m}\right)}{\sqrt{t-a-r-\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_m}}}. \qquad (1.109)$$

Полученное при этом представление импульсной характеристики уже не будет содержать "паразитных", реально не существующих всплесков, привносимых разрывным характером плотности поверхностного тока в приближении физической оптики.

Отметим также особый случай, когда терминатор L принадлежит плоскости с нормальным вектором $\vec{l}^{\,0}$. В этом случае

$$\Phi\left(\vec{x}\right)\Big|_L = const$$

и, следовательно,

$$\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}=c \text{ на } L,$$

где c – некоторая константа.

Отсюда следует, что

$$\left(\vec{H}^{рас}\left(r\;\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.L} \sim exp\left(j\,k\left(a+r+c\right)\right)\int\limits_L \vec{A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right)d\,l,$$

$$\left(\vec{\mathscr{H}}^{pac}\left(t,\vec{x}\,\middle|\,\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.L} \sim \delta\left(t-a-r-c\right)\int\limits_{L}\vec{A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^{2}\right)dS\,.$$

В этом случае, как легко видеть, образуется сильный "паразитный" терминаторный всплеск импульсной характеристики, который необходимо исключить.

В ряде случаев для оценки импульсных характеристик сложных рассеивателей в двухпозиционной локации более предпочтительным может оказаться другой подход (разработанный авторами) также использующий приближение физической оптики, но минующий оценку вкладов точек стационарной фазы [27–29].

Таким образом, в разделе дана методика получения импульсной характеристики идеально проводящего гладкого объекта в двухпозиционном случае.

При этом в полученном асимптотическом представлении выделены члены, ответственные за возникновение "паразитных" всплесков, которые выражаются контурным интегралом. Получены главные члены асимптотики этих интегралов, которые необходимо исключить из представления импульсной характеристики для сглаживания последней. Это позволит повысить точность расчетов на интервале времени до момента прихода "ползущей" волны, огибающей область тени.

Эти результаты опираются на полученное обобщение формулы М.И. Конторовича, дающей вклад граничного контура в двумерном методе стационарной фазы, на случай неплоской области и невырожденных точек стационарной фазы любого типа.

1.5. О принципе взаимности для рассеянных полей в приближении физической оптики

Как известно, для полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, и, вообще говоря, каким-либо граничным условиям на поверхности рассеивающих объектов, справедлив принцип взаимности. Однако когда речь идет об аппроксимативных полях (например, высокочастотных асимптотических решений уравнений Максвелла), то принцип взаимности, как оказывается, может и не выполняться. Остановимся подробнее в этом плане на использованном в разделе 1.4 методе физической оптики.

Пусть идеально проводящий рассеивающий объект V ограничен замкнутой поверхностью S и начало декартовой системы координат расположено в области V.

Рассмотрим облучение объекта V электрическим диполем, вектор-момент которого $\vec{p}$ и который локализован в точке с радиус-вектором $\vec{a} = -a\vec{R}^0$. Порождаемое диполем первичное поле $\vec{E}\left(\vec{x}\,|\,\vec{a},\vec{p}\right)$, $\vec{H}\left(\vec{x}\,|\,\vec{a},\vec{p}\right)$ имеет при фиксированном орте $\vec{R}^0$ и $a \to +\infty$ следующее асимптотическое представление:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}\left(\vec{x}\,|\,\vec{a},\vec{p}\right) \\ \vec{H}\left(\vec{x}\,|\,\vec{a},\vec{p}\right) \end{pmatrix} = \frac{k_0^2}{\varepsilon_0}\frac{exp\left(j k_0 a\right)}{4\pi a}\begin{pmatrix} \vec{E}^0\left(\vec{x}\,|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right) \\ \vec{H}^0\left(\vec{x}\,|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right) \end{pmatrix}, \tag{1.110}$$

где

$$\begin{pmatrix} \vec{E}^0\left(\vec{x}\,|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right) \\ \vec{H}^0\left(\vec{x}\,|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\vec{p} - \vec{R}^0\left(\vec{p}\cdot\vec{R}^0\right)\right) exp\left(j k_0\left(\vec{R}^0\vec{x}\right)\right) \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)\right) exp\left(j k_0\left(\vec{R}^0\vec{x}\right)\right) \end{pmatrix} - \tag{1.111}$$

поле плоской волны.

Из векторных интегральных формул типа Грина для электромагнитных полей [10] с учетом формулы (1.110) следует, что рассеянное объектом V поле в дальней зоне в точке с радиус-вектором $\vec{r} = r\cdot\vec{r}^{\,0}$ имеет асимптотическое (при $a \to +\infty$, $r \to +\infty$) представление:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}^{pac}\left(\vec{r}\,|\,\vec{a},\vec{p}\right) \\ \vec{H}^{pac}\left(\vec{r}\,|\,\vec{a},\vec{p}\right) \end{pmatrix} = \frac{k_0^2}{\varepsilon_0}\frac{exp\left(j k_0\left(a+r\right)\right)}{\left(4\pi\right)^2 a r}\begin{pmatrix} \vec{\mathscr{E}}^{pac}\left(\vec{r}^{\,0}\,\middle|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right) \\ \vec{\mathscr{H}}^{pac}\left(\vec{r}^{\,0}\,\middle|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right) \end{pmatrix}, \tag{1.112}$$

в котором векторы $\vec{\mathscr{E}}^{\,рас}$, $\vec{\mathscr{H}}^{\,рас}$ составляют комплексную диаграмму рассеяния – поле, рассеиваемое в направлении $\vec{r}^{\,0}$ (в дальней зоне) при падении на V плоской волны (1.110). При этом

$$\vec{\mathscr{E}}^{\,рас}\left(\vec{r}^{\,0}\,\middle|\,\vec{R}^0,\vec{p}\,\right)=-j\,k_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int\limits_S\left(\vec{K}-\vec{r}^{\,0}\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{K}\right)\right)exp\left(-j\,k_0\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\right)dS\,,$$

$$\vec{\mathscr{H}}^{\,рас}\left(\vec{r}^{\,0}\,\middle|\,\vec{R}^0,\vec{p}\,\right)=-j\,k_0\int\limits_S\left(\vec{r}^{\,0}\times\vec{K}\,\right)exp\left(-j\,k_0\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{x}\,\right)\right)dS\,, \quad (1.113)$$

где $\vec{K}=\vec{n}\times\vec{H}^{полн}$, $\vec{H}^{полн}$ – полное поле вызванное падающей плоской волной (1.110).

Из принципа взаимности в его обычной формулировке:

$$\vec{q}\cdot\vec{E}^{рас}\left(\vec{r}\,\middle|\,\vec{a},\vec{p}\,\right)=\vec{p}\cdot\vec{E}^{рас}\left(\vec{a}\,\middle|\,\vec{r},\vec{q}\,\right), \quad (1.114)$$

асимптотической формулы (1.112) и соотношений

$$\vec{r}=r\cdot\vec{r}^{\,0}, \qquad \vec{a}=-a\cdot\vec{R}^0$$

вытекает принцип взаимности для комплексных диаграмм рассеяния:

$$\vec{q}\cdot\vec{\mathscr{E}}^{\,рас}\left(\vec{r}^{\,0}\,\middle|\,\vec{R}^0,\vec{p}\,\right)=\vec{p}\cdot\vec{\mathscr{E}}^{\,рас}\left(-\vec{R}^0\,\middle|\,-\vec{r}^{\,0},\vec{q}\,\right). \quad (1.115)$$

Равенства (1.114), (1.115) имеют строгий характер, представляют собой строгое следствие уравнений Максвелла. Выясним, как обстоит дело с выполнимостью равенства (1.115) в случае рассеянных полей, рассчитываемых в приближении физической оптики, при кирхгофовской аппроксимации в формулах (1.113) эквивалентной плотности поверхностного тока

$$\vec{K}\left(\vec{x}\,\right)\approx 2\,\vec{n}\times\vec{H}^{\,0}\left(\vec{x}\,\middle|\,\vec{R}^{\,0},\vec{p}\,\right)$$

на той части $S'\left(\vec{R}^0\right)\subset S$, где $\vec{n}\cdot\vec{R}^0>0$ ($\vec{n}$ – орт внутренней нормали) и $\vec{K}\left(\vec{x}\right)\approx 0$ на дополнительной части $S\setminus S'\left(\vec{R}^0\right)$. В этом приближении

$$\vec{\mathscr{E}}^{\,pac}\left(\vec{r}^{\,0}\,\middle|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right)=-2\,j\,k_0\int\limits_{S'\left(\vec{R}^0\right)}\Big[\left(\vec{R}^0-\vec{r}^{\,0}\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{R}^0\right)\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{p}\right)-$$

$$-\left(\vec{p}-\vec{r}^{\,0}\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{p}\right)\left(\vec{R}^0\cdot\vec{n}\right)\right)\Big]\;exp\left(j\,k_0\left(\vec{R}^0-\vec{r}^{\,0}\right)\cdot\vec{x}\right)dS\,. \qquad (1.116)$$

$$\vec{\mathscr{E}}^{\,pac}\left(-\vec{R}^0\,\middle|-\vec{r}^{\,0},\vec{q}\right)=-2\,j\,k_0\int\limits_{S'\left(-\vec{r}^{\,0}\right)}\Big[-\left(\vec{r}^{\,0}-\vec{R}^0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{r}^{\,0}\right)\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{q}\right)+$$

$$+\left(\vec{q}-\vec{R}^0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{q}\right)\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{n}\right)\right)\Big]\;exp\left(j\,k_0\left(\vec{R}^0-\vec{r}^{\,0}\right)\cdot\vec{x}\right)dS\,. \qquad (1.117)$$

В случае однопозиционной локации, когда $-\vec{r}^{\,0}=\vec{R}^0$, поверхности $S'\left(\vec{R}^0\right)$ и $S'\left(-\vec{r}^{\,0}\right)$ совпадают и при этом $\vec{R}^0-\vec{r}^{\,0}\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{R}^0\right)=\vec{r}^{\,0}-\vec{R}^0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{r}^{\,0}\right)=0$, так что

$$\vec{\mathscr{E}}^{\,pac}\left(\vec{r}^{\,0}\,\middle|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right)=2\,j\,k_0\left(\vec{p}-\vec{r}^{\,0}\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{p}\right)\right)\cdot I\,, \qquad (1.118)$$

$$\vec{\mathscr{E}}^{\,pac}\left(-\vec{R}^0\,\middle|-\vec{r}^{\,0},\vec{q}\right)=2\,j\,k_0\left(\vec{q}-\vec{r}^{\,0}\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{q}\right)\right)\cdot I\,, \qquad (1.119)$$

где

$$I=\int\limits_{S'\left(\vec{R}^0\right)}\left(\vec{R}^0\cdot\vec{n}\right)exp\left(2\,j\,k_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right)\right)dS\,. \qquad (1.120)$$

Из (1.118), (1.119) следуют (для случая $-\vec{r}^{\,0}=\vec{R}^0$) равенства:

$$\vec{q}\,\vec{\mathscr{E}}^{\,pac}\left(\vec{r}^{\,0}\,\middle|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right)=\vec{p}\,\vec{\mathscr{E}}^{\,pac}\left(-\vec{R}^0\,\middle|-\vec{r}^{\,0},\vec{q}\right)=$$

$$=2\,j\,k_0\Big[\left(\vec{p}\cdot\vec{q}\right)-\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{q}\right)\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{p}\right)\Big]\cdot I\,.$$

Таким образом, в однопозиционном случае равенство (1.117) имеет место и для рассеянных полей, рассчитанных в приближении физической оптики.

В случае же бистатической локации $\left(-\vec{r}^{\,0} \neq \vec{R}^{0}\right)$ интегрирование в (1.118), (1.119) проводится по разным, несовпадающим многообразиям (и при этом не совпадают, вообще говоря, и подынтегральные функции, домноженные скалярно соответственно на $\vec{q}$ и $\vec{p}$).

Таким образом, принцип взаимности в бистатическом случае (в приближении физической оптики), вообще говоря, места не имеет.

Этот вывод является тем более практически важным, что разнесенный прием занимает важное место в современной радиолокации, а физоптическое приближение с использованием соображений взаимности представляет собой достаточно привычный подход, часто применяемый в электродинамических расчетах без должного обоснования.

1.6. Эффективная поверхность рассеяния (ЭПР) трехмерных объектов и ее связь с ЭПР двумерных объектов

Пусть на объект конечных размеров, ограниченный поверхностью S, падает плоская волна

$$\vec{E}^{0}(x) = \vec{p}\, exp\left(-j k_0 \left(\vec{R}^{0} \cdot \vec{x}\right)\right),$$

$$\vec{H}^{0}(x) = \left(\vec{p} \times \vec{R}^{0}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, exp\left(-j k_0 \left(\vec{R}^{0} \cdot \vec{x}\right)\right)$$

(излучение радиолокатора), где $-\vec{R}^{0}$ – орт луча, идущего в направлении от радиолокатора к цели, а $\vec{p} = p \cdot \vec{p}^{\,0}$ – вектор поляризации, $\vec{p}^{\,0} \perp \vec{R}^{0}$.

Под ЭПР понимается величина, определяемая формулой [30]:

$$\sigma = \lim_{R\to\infty} 4\pi R^2 \frac{\left|\vec{p}^{\,пр}\cdot\vec{E}^{рас}\right|^2}{\left|\vec{p}^{\,0}\cdot\vec{E}^{0}\right|^2}, \tag{1.121}$$

где R − расстояние от рассеивателя до приемной антенны, $\vec{p}^{\,пр}$ – единичный вектор, указывающий направление поляризации приемной антенны, $\vec{E}^{рас}$ – поле, рассеянное объектом в направлении на приемную антенну.

Таким образом, задача нахождения ЭПР рассеивателя фактически сводится к задаче определения рассеянного поля $\vec{E}^{рас}$ в точке приема.

Если $\vec{E}(\vec{x})$, $\vec{H}(\vec{x})$ – полное поле, то рассеянное поле $\vec{E}^{рас}(x)=\vec{E}(x)-\vec{E}^{0}(x)$, как это вытекает из леммы Лоренца, представится формулой

$$j\,\omega\vec{q}\cdot\vec{E}^{рас}(x_0)=\int_S\Big(\vec{H}^{\perp}(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}_0^{eT}\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)-$$

$$-\vec{E}^{T}(x)\cdot\vec{\mathscr{H}}_0^{e\perp}\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)\Big)dS, \tag{1.122}$$

где $\vec{\mathscr{E}}_0^{e}\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}_0^{e}\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)$ – поле точечного электрического диполя с вектор-моментом $\vec{q}$, помещенного в точке x_0, расположенной где-либо вне S, причем $\vec{q}$ – произволен по величине и направлению.

Положим $\vec{q}=\vec{p}$, и пусть радиус-вектор точки наблюдения $\vec{x}^{0}=R\,\vec{R}^{0}$.

Заменим входящие в (1.110) вектор-функции $\vec{\mathscr{E}}_0^{e}\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}_0^{e}\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)$ их асимптотическими выражениями при $R\to\infty$

$$\vec{\mathscr{E}}_0^e\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)\sim\Omega\left(k_0\,R\right)\vec{\mathscr{E}}_0^e\left(x\,|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right),$$

$$\vec{\mathscr{H}}_0^e\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)\sim\Omega\left(k_0\,R\right)\vec{\mathscr{H}}_0^e\left(x\,|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right),$$

где $\Omega\left(k\,R\right)=\dfrac{exp\left(j\,k_0\,R\right)}{4\,\pi\,k_0\,R}$,

$$\vec{\mathscr{E}}_0^e\left(x\,|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right)=k_0^2\,\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\vec{p}^T\,exp\left(-\,j\,k_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{X}\right)\right), \qquad (1.123)$$

$$\vec{\mathscr{H}}_0^e\left(x\,|\,\vec{R}^0,\vec{p}\right)=-k_0^2\,\omega\,\vec{p}^\perp\,exp\left(-\,j\,k_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{X}\right)\right), \qquad (1.124)$$

$$\vec{p}^T=\vec{p}-\vec{R}^0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{p}\right),\qquad \vec{p}^\perp=\vec{R}^0\times\vec{p}\,.$$

Формулы (1.123), (1.124) представляют поле линейно поляризованной плоской волны, приходящей из бесконечности с волновым вектором $\left(-\vec{R}^0\right)$. Эти асимптотические представления справедливы при $x\in S$ и $R>>D$ где D – диаметр зондируемого объекта (т.е. его наибольшее линейное измерение).

Тогда рассеянное поле $\vec{E}^{рас}\left(x\right)$ в дальней зоне будет иметь следующий вид:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^{рас}\left(R\,\vec{R}^0\right)\sim\Omega\left(k_0\,R\right)k_0^2\,\omega\int\limits_S exp\left(-\,j\,k_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{X}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\vec{p}\cdot\vec{H}^\perp\left(x\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}-\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)\cdot\vec{E}^\perp\left(x\right)\right]d\,S\,, \qquad (1.125)$$

где $\vec{H}^\perp=\vec{n}\times\vec{H}$, $\vec{E}^\perp=\vec{n}\times\vec{E}$, $\vec{n}$ – орт нормали к S.

В случае, если речь идет об идеально проводящих рассеивателях, $\vec{E}^T\Big|_S=0$, и равенство (1.125) переходит в следующее:

$$j\omega\vec{p}\cdot\vec{E}^{pac}\left(R\vec{R}^0\right)\sim\Omega\left(k_0R\right)k_0^2\,\omega\int\limits_S exp\left(-jk_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{X}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\vec{p}\cdot\vec{H}^{\perp}(x)\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,dS. \qquad (1.126)$$

Тем не менее, отметим, что представление, аналогичное формуле (1.126), вытекает из (1.125) и в более широком классе рассеивателей, граничные свойства которых можно (с достаточной степенью точности) выразить условием импедансного типа:

$$\vec{E}^T=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}Z\vec{H}^{\perp}\ \text{ на }\ S. \qquad (1.127)$$

Именно, при граничном условии вида (1.127) (выполняемом, например, на границе тела с большой конечной проводимостью, на границе некоторых типов радиопоглощающих материалов, применяемых в радиомаскировочных целях и др.) представление вектора $\vec{E}^{pac}\left(R\vec{R}^0\right)$ можно получить, заменив в формуле (1.126) в скалярном произведении $\vec{p}\cdot\vec{H}^{\perp}(x)$ вектор $\vec{p}$ на вектор $\vec{p}_Z=\vec{p}+\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)Z$.

Из формулы (1.126) следует строгое выражение для ЭПР идеально отражающего объекта. Так как $\left|\vec{p}\cdot\vec{E}^0(x)\right|=p$, то при $R/D>>1$ имеет место асимптотическое равенство

$$4\pi R^2\frac{\left|\vec{p}\cdot\vec{E}^{pac}\left(R\vec{R}^0\right)\right|^2}{\left|\vec{p}\cdot\vec{E}^0\right|^2}\sim$$

$$\sim\frac{\pi}{\lambda^2}\left|\int\limits_S exp\left(-jk_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{X}\right)\right)\frac{1}{p}\left(\vec{p}^0\cdot\vec{H}^{\perp}(x)\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,dS\right|^2,$$

откуда и выводим точную формулу для ЭПР:

$$\sigma_S^{III} \sim \frac{\pi}{\lambda^2} \left| \int_S exp\left(-j\,k_0 \left(\vec{R}^0 \cdot \vec{X}\right)\right) \frac{1}{p} \left(\vec{p}^0 \cdot \vec{H}^{\perp}(x)\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, d\,S \right|^2 . \quad (1.128)$$

Применение точной формулы (1.128), требует предварительного нахождения плотности поверхностного тока $\vec{H}^{\perp}$ на S каким-либо строгим методом (с помощью метода собственных функций, интегральных уравнений и т.д.).

В практике расчетов ЭПР радиолокационных целей достаточно больших зарезонансных размеров обычно используют выражение плотности поверхностного тока $\vec{H}^{\perp}$ в приближении физической оптики, что приводит к замене формулы (1.128) общеизвестной расчетной формулой [7, 8]:

$$\sigma_S^{III} \sim \frac{4\pi}{\lambda^2} \left| \int_{S_{осв}} exp\left(-2\,j\,k_0 \left(\vec{R}^0 \cdot \vec{X}\right)\right)\left(\vec{n} \cdot \vec{R}^0\right) d\,S \right|^2 , \quad (1.129)$$

где $S_{осв}$ – часть поверхности S, которую "освещает" поле падающей плоской волны.

Аналогично, в случае двумерной модели цилиндрического тела с направляющей линией l, не ограниченного вдоль образующих и облучаемого плоской волной, фронт которой параллелен образующим – величина ЭПР, отнесенная к единице длины образующей

$$\sigma_l^{II} = \lim_{R\to\infty} 2\pi R \, \frac{\left| \vec{p}^0 \cdot \vec{E}^{рас}\left(R\vec{R}^0\right)\right|^2}{\left| \vec{p}^0 \cdot \vec{E}^0 \right|^2} . \quad (1.130)$$

Эта величина, как будет показано, в точной теории выражается различным образом при Е- и Н-поляризациях.

Введем оси декартовой системы координат $O\,x_1\,x_2\,x_3$ связанные с цилиндрическим рассеивателем так, чтобы орт $\vec{e}_3$ был параллелен образующим, а орт $\vec{e}_1 = \vec{R}^0$ (орт луча, идущего от цели к радиолокатору). При Е-поляризации $\vec{p}^0 = \vec{e}_3$, при Н-поляризации примем $\vec{p}^0 = -\vec{e}_2$. Заметим, что при $R \to \infty$ и $\vec{p}^0 \perp \vec{R}^0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathscr{E}}_0^{\,e}\left(x \,\middle|\, R\vec{R}^0, \vec{p}\right) d\,x_3 \sim \vec{p}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2}{\varepsilon_0}\Omega\left(k_0 R\right) d\,x_3 =$$

$$= -\vec{p}\,\frac{k_0^2}{4\,j\,\varepsilon_0} H_0^{(1)}\left(k_0 R\right) \underset{R\to\infty}{\sim} \vec{p}\,\Omega^{II}\left(k_0 R\right) k_0\,\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, exp\left(-\,j\,k_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right)\right), \tag{1.131}$$

где

$$\Omega^{II}\left(k_0 R\right) = -\frac{1}{4\,j}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 R}}\, exp\left(j\,k_0 R - \frac{\pi\,j}{4}\right).$$

Из (1.122) и (1.131) следует

$$\vec{p}\cdot\vec{E}^{pac}\left(R\vec{R}^0\right) \sim \Omega^{II}\left(k_0 R\right) k_0 \int_l \left(\vec{p}^0\cdot\vec{H}^{\perp}\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\; exp\left(-\,j\,k_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right)\right) d\,l, \tag{1.132}$$

где при Е-поляризации $\vec{p}^0 = \vec{e}_3$, $\vec{E} = \vec{e}_3\,u$,

$$\left(\vec{p}^0\cdot\vec{H}^{\perp}\right) = -\frac{1}{j\,\omega\mu_0}\frac{\partial u}{\partial n}, \tag{1.133}$$

а при Н-поляризации $\vec{p}^0 = -\vec{e}_2$, $\vec{H} = \vec{e}_3\,v$,

$$\left(\vec{p}^0\cdot\vec{H}^{\perp}\right) = \left(\vec{n}\cdot\vec{R}^0\right)v. \tag{1.134}$$

Таким образом, в силу (1.130) и (1.132)

$$\sigma_l^{II} = \frac{\pi}{2\lambda}\left|\int_l \left(\vec{p}^0\cdot\vec{H}^{\perp}\right)\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, exp\left(-\,j\,k_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right)\right) d\,l\right|^2, \tag{1.135}$$

где $\left(\vec{p}^{\,0}\cdot\vec{H}^{\perp}\right)$ определяется формулами (1.133), (1.134) в зависимости от поляризации (параллельной или перпендикулярной).

В приближении физической оптики на освещенной стороне объекта

$$\vec{p}^{\,0}\cdot\vec{H}^{\perp}\approx 2\,\vec{p}^{\,0}\cdot\vec{H}^{0\perp}=2\left(\vec{n}\cdot\vec{R}^{0}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,exp\left(-j\,k_0\left(\vec{R}^{0}\cdot\vec{x}\right)\right)$$

и формула (1.135) переходит в

$$\sigma_l^{II}\approx\frac{\pi}{2\lambda}\left|\int\limits_{l_{осв}}\left(\vec{n}\cdot\vec{R}^{0}\right)exp\left(-j\,k_0\left(\vec{R}^{0}\cdot\vec{x}\right)\right)dl\right|^2. \qquad (1.136)$$

Если рассеиватель – бесконечно тонкий идеально проводящий экран, то в точных формулах (1.128), (1.135) можно проводить интегрирование по S^{+} и S^{-} (соответственно по l^{+} и l^{-}) при фиксированном направлении нормали. В результате в эти формулы вместо $\vec{H}^{\perp}$ войдет $\vec{K}=\left(\vec{H}^{\perp}\right)^{+}-\left(\vec{H}^{\perp}\right)^{-}$:

$$\sigma_S^{III}\approx\frac{\pi}{\lambda^2}\left|\int\limits_S exp\left(-j\,k\left(\vec{R}^{0}\cdot\vec{x}\right)\right)\left(\vec{p}^{\,0}\cdot\vec{K}\right)\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,d\,S\right|^2, \qquad (1.137)$$

$$\sigma_l^{II}\approx\frac{\pi}{2\lambda}\left|\int\limits_l exp\left(-j\,k_0\left(\vec{R}^{0}\cdot\vec{x}\right)\right)\left(\vec{p}^{\,0}\cdot\vec{K}\right)\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,d\,l\right|^2. \qquad (1.138)$$

Формулы же (1.130), (1.136) остаются, очевидно, без изменений.

Нахождение ЭПР бесконечных (по образующим) цилиндрических тел – как приближенное, так и строгое – требует существенно меньшего объема вычислений, чем расчет ЭПР реальных трехмерных объектов, и, вместе с тем, позволяет получить качественно верные сравнительные выводы о рассеивающих свойствах различных объектов, о характере зависимости их ЭПР от частоты и других параметров.

Вместе с тем, как будет здесь показано, по "двумерным" ЭПР, в определенных условиях, можно получать и количественные оценки ЭПР реальных объектов. Продемонстрируем такую возможность, прежде всего, на анализе выражений для ЭПР конечного цилиндрического идеально проводящего экрана S с произвольной (незамкнутой) направляющей линией l. Предположим, что l расположена в плоскости $x_1 O x_2$, причем на S $-d/2 \le x_3 \le d/2$, а орт $\vec{R}^0 = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \cos\theta_i$.

Введем в рассмотрение еще два орта:

$$\vec{R}_1^0 = \frac{1}{\sin\theta_3}\left(\vec{e}_1 \cos\theta_1 + \vec{e}_2 \cos\theta_2\right), \quad \vec{R}_2^0 = \vec{e}_3 \cos\theta_3 + \vec{e}_2 \sin\theta_3 .$$

Тогда, в приближении физической оптики

$$\sigma_S^{III} \approx \frac{4\pi}{\lambda^2}\left|\int_S exp\left(-2\,j\,k_0\left(\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right)\right)\left(\vec{R}^0\cdot\vec{n}\right)d\,S\right|^2 =$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda^2}\left|\int_l exp\left(-2\,j\,k_0 \sin\theta_3\left(\vec{R}_1^0\cdot\vec{x}\right)\right)\left(\vec{R}_1^0\cdot\vec{n}\right)d\,l\right|^2 \cdot$$

$$\cdot\left|\int_{-d/2}^{d/2} exp\left(-2\,j\,k_0\,x_3 \cos\theta_3\right)\sin\theta_3\,d\,x_3\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi\sin\theta_3}\frac{2\pi}{\lambda_1}\left|\int_l exp\left(-2\,j\,k_1\left(\vec{R}_1^0\cdot\vec{x}\right)\right)\left(\vec{R}_1^0\cdot\vec{n}\right)d\,l\right|^2 \cdot$$

$$\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\left|\int_{-d/2}^{d/2} exp\left(-2\,j\,k_0\left(\vec{R}_2^0\cdot\vec{e}_3\right)\right)\vec{x}_3\left(\vec{R}_2^0\cdot\vec{e}_2\right)d\,x_3\right|^2 ,$$

где $k_1 = k_0 \sin\theta_3$, $\lambda_1 = \lambda/\sin\theta_3$ и, таким образом,

$$\sigma_S^{III} = \frac{1}{\pi \, sin \, \theta_3} \sigma_1^{II}\left(\vec{R}_1^0, \lambda_1\right) \cdot \sigma_2^{II}\left(\vec{R}_2^0, \lambda\right). \qquad (1.139)$$

Здесь $\sigma_1^{II}\left(\vec{R}_1^0, \lambda_1\right)$ – ЭПР бесконечной цилиндрической поверхности с направляющей l и образующими, параллельными Ox_3, зондируемой на длине волны $\lambda_1 = \lambda / sin \, \theta_3$, в направлении $-\vec{R}_1^0$ (рис. 1.5).

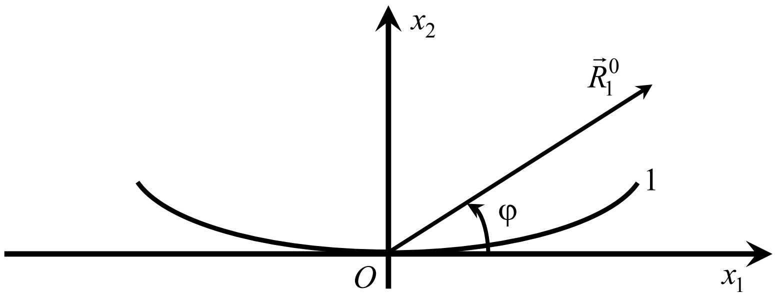

Рис. 1.5. Геометрия облучения бесконечной цилиндрической поверхности

При этом

$$cos \, \varphi = \frac{cos \, \theta_1}{sin \, \theta_3}, \; sin \, \varphi = \frac{cos \, \theta_2}{sin \, \theta_3}.$$

Величина же $\sigma_2^{II}\left(\vec{R}_2^0, \lambda\right)$ есть ЭПР полосы $\Big(x_2 = 0$, $-d/2 \le x_3 \le d/2$, $-\infty < x_1 < +\infty\Big)$, зондируемой в направлении $-\vec{R}_2^0$ на исходной длине волны λ (рис. 1.6).

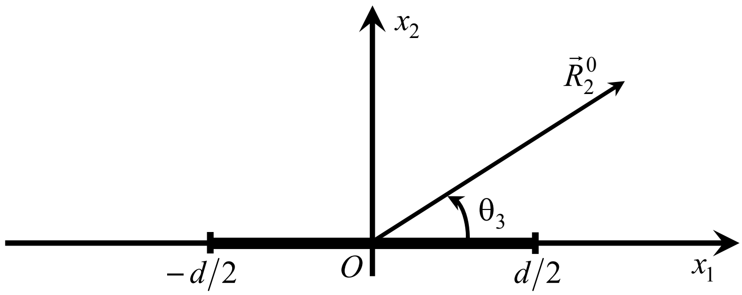

Рис. 1.6. Геометрия облучения бесконечной полосы

Практически соотношение (1.139) пригодно при достаточно больших углах θ_3. Предположим, например, что $\pi/6 \le \theta_3 \le \pi/2$, тогда $\frac{1}{\pi \sin\theta_3} \in \left(1/\pi,\, 2/\pi\right)$. При облучении объекта S волной, фронт которой параллелен образующим цилиндра, имеем $\theta_3 = \pi/2$ и поэтому $\lambda_1 = \lambda$, $\vec{R}_1^0 = \vec{R}^0$, $\vec{R}_2^0 = \vec{e}_2$,

$$\sigma_S^{III} = \frac{1}{\pi}\sigma_1^{II}\left(\vec{R}^0,\lambda\right)\cdot\sigma_2^{II}\left(\vec{e}_2,\lambda\right). \tag{1.140}$$

Интересно и важно отметить, что аналог формулы (1.129), выведенной в приближении физической оптики, имеет место и если применить другие, более точные, чем в приближении физической оптики выражения для плотности поверхностного тока $\vec{K}(x)$.

Будем считать достаточно большим лишь параметр $k_0 d$ (но не обязательно большими должны быть линейные размеры, характеризующие l) и примем, что на S функция $\vec{K}(x)$ совпадает при $-d/2 \le x_3 \le d/2$ с плотностью поверхностного тока $\vec{K}^{II}(x_1, x_2)$, возбуждаемого на соответствующей бесконечной цилиндрической поверхности. Примем также, что $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, причем в плоскости $x_1 O x_2$ орт $\vec{R}^0$ ориентирован любым образом; вектор же $\vec{p}$ ориентирован произвольно в плоскости, нормальной к $\vec{R}^0$.

Тогда, пользуясь точной формулой (1.137), получим:

$$\sigma_S^{III} = \frac{\pi}{\lambda^2}\left| \int_l exp\left(-j k_0 \left(\vec{R}^0 \cdot \vec{x}\right)\right)\left(\vec{p}^0 \cdot \vec{K}^{II}\right)\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, d\,l \int_{-d/2}^{d/2} d\,x_3 \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2\lambda}\left| \int_l exp\left(-j k_0 \left(\vec{R}^0 \cdot \vec{x}\right)\right)\left(\vec{p}^0 \cdot \vec{K}^{II}\right)\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, d\,l \right|^2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} d^2.$$

Это означает, что в рассматриваемом приближении

$$\sigma_S^{III} = \frac{1}{\pi}\sigma_1^{II}\left(\vec{R}^0, \lambda, \vec{p}^0\right)\cdot \sigma_2^{II}\left(\vec{e}_2, \lambda\right), \qquad (1.141)$$

причем в отличие от (1.139), σ_1^{II} здесь – точное значение двумерной ЭПР, а σ_2^{II} – то же, что и в (1.139) приближенное значение ЭПР плоской полосы при нормальном ее облучении. Существенно то, что в формуле (1.141) величина σ_1^{II}, а значит и стоящее в левой части значение ЭПР реального объекта σ_S^{III} зависит от орта поляризации $\vec{p}^0$, который, как указывалось, может быть выбран произвольно (при условии $\vec{p}^0 \perp \vec{R}^0$).

Таким образом, рассчитав точно ЭПР σ_1^{II} двумерной модели (с этой целью решив соответствующее интегральное уравнение относительно плотности наведенных поверхностных токов $\vec{K}^{II}(x)$), по формуле (1.141) находим более точное и более информативное (в частности, в отношении зависимости от поляризации зондирующей волны) выражение ЭПР реального объекта.

Точно таким же способом, каким выведено соотношение (1.140), получается еще одно аналогичное по структуре равенство, в левой части которого точное значение σ_S^{III}, получаемое по формуле (1.137) при истинном распределении $\vec{K}(x)$, а ЭПР двумерной модели σ_1^{II} вычисляется по точной формуле (1.138), но с использованием приближенного выражения плотности тока $\vec{K}^{II}(x_1, x_2)$, получаемого усреднением $\vec{K}(x)$ по координате x_3:

$$\vec{K}^{II}(x_1, x_2) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \vec{K}(x) d x_3 . \qquad (1.142)$$

Это замечание имеет скорее теоретический, чем расчетно-практический смысл: равенство (1.141) оказывается точным, если плотность поверхностного тока в двумерной модели заменить интегральным средним (1.142). На практике, конечно, имеет более важное значение приближенное равенство (1.141) в его первоначальной, описанной выше трактовке.

Наконец заметим, что во всем проведенном в связи с формулой (1.141) рассмотрении l может представлять собой не одиночную линию, а совокупность нескольких дуг и, соответственно, поверхность S – совокупность нескольких цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси Ox_3. Например, речь может идти о расчете – посредством формулы (1.141) – ЭПР двухзеркальной антенны при ее зондировании извне: решив систему интегральных уравнений относительно токов на системе зеркал l_1, l_2 и получив токи $\vec{K}_1^{II}$, $\vec{K}_2^{II}$ с учетом всех внутрисистемных взаимодействий и резонансов, вычисляем ЭПР антенной системы σ_S^{III} по формуле (1.141).

В случае рассеивателей, представляющих собой "поверхности двоякой кривизны", у которых (в отличие от цилиндрических поверхностей) ни одна из главных кривизн не равна нулю тождественно, резонансные эффекты зависимости ЭПР от частоты не могут быть рассчитаны посредством двумерных моделей.

Возникающие в подобных задачах трудности и некоторые подходы к их преодолению рассмотрим на простом примере ЭПР бесконечно тонкого идеально проводящего параболоида вращения при его зондировании в осевом направлении.

Осевое зондирование параболоида S, уравнение которого $2qx_3 = x_1^2 + x_2^2$, причем $x_1^2 + x_2^2 \le a^2$ и $k_0 a >> 1$, приводит (в приближении физической оптики) к ЭПР

$$\sigma_S^{III} = 2\pi q^2 \left(1 - cos\, 2k_0 d\right),^1 \tag{1.143}$$

где $d = a^2 / 2q$ – возвышение краевых точек рассматриваемого экрана над плоскостью $x_1 O x_2$.

В соответствующей же двумерной задаче при зондировании в осевом направлении параболического цилиндра с направляющей линией l, уравнение которой $2qx_3 = x_1^2$, получаем (в том же физоптическом приближении) отнесенное к единице длины образующей значение ЭПР

$$\sigma_l^{II} = 4q \left| \int\limits_0^{\sqrt{2kd}} e^{jt^2}\, dt \right|^2 = 4\pi q \left[C^2\left(\sqrt{2k_0 d}\right) + S^2\left(\sqrt{2k_0 d}\right)\right], \tag{1.144}$$

где $C(x)$, $S(x)$ – интегралы Френеля [31].

Как функции частоты (или волнового числа $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$) величины (1.143), (1.144) имеют быстроосциллирующий характер, причем амплитуда этих колебаний в двумерном случае (формула (1.144)) затухает при увеличении частоты и уже при $k_0 d \ge 10$ $\sigma_l^{II} \approx \pi q$.

[1] Простые подсчеты, дающие выражение (1.143) и приводимое ниже значение (1.144) ЭПР двумерной модели, мы опускаем

Для трехмерного же объекта осцилляции ЭПР, выражаемой равенством (1.143), не гаснут и в высокочастотной области, при этом, небольшие колебания частоты могут очень заметно изменить σ_S^{III}; резонансные эффекты, имеющие здесь место при $k_0 a >> 1$, обусловлены наличием второго параметра, $k_0 d$, и при $k_0 d \to 0$ исчезают.

Однако, вместо такой неустойчивой, подверженной случайным колебаниям величины как σ_S^{III}, можно ввести ее усредненное по частоте значение

$$\overline{\sigma}_S^{III}(k_1,k_2) = 2\pi q^2 \frac{1}{k_2 - k_1} \int_{k_1}^{k_2} \left(1 - cos\left(2 k_0 d\right)\right) d k_0 = ,$$
$$= 2\pi q^2 \left(1 - \frac{sin\left(2 k_2 d\right) - sin\left(2 k_1 d\right)}{2\left(k_2 - k_1\right) d} \right),$$

которое при достаточно больших значениях параметра $2\left(k_2 - k_1\right)d$ является близким к постоянной величине:

$$\overline{\sigma}_S^{III}(k_1,k_2) \approx 2\pi q^2 . \qquad (1.145)$$

Аналогично, при таком усреднении

$$\overline{\sigma}_l^{II}(k_1,k_2) \approx \pi q , \qquad (1.146)$$

так, что имеет место соотношение:

$$\overline{\sigma}_S^{III}(k_1,k_2) \approx \frac{2}{\pi} \left[\overline{\sigma}_l^{II}(k_1,k_2)\right]^2 . \qquad (1.147)$$

Равенства (1.139)[1], (1.140), (1.141), (1.147), выражающие ЭПР различных объектов и притом рассчитанные на основе

---

[1] При достаточно большом θ_3; например $\theta_3 \geq \pi/6$.

разных методик, обладают общностью структуры и следующей количественной закономерностью: ЭПР трехмерного объекта (при фиксированной частоте – в нерезонансном случае, или же значение, усредненное по частоте – при наличии резонанса) представляется произведением соответствующих[2] "двумерных" ЭПР (или же усреднений по частоте) на некоторый безразмерный коэффициент обычно порядка нескольких десятых, зависящий, вообще говоря, от конфигурации рассеивающего объекта, направления зондирования и поляризации зондирующего сигнала.

Можно продемонстрировать выполнение этой количественной закономерности на большом числе конкретных примеров, как в приближении физической оптики, так и на основе более точных аппроксимаций поверхностного тока (в частности, на основе метода краевых волн [7, 8]).

Например, в приближении физической оптики ЭПР плоской фигуры S (произвольной формы) при зондировании в направлении нормали

$$\sigma_S^{III} = \frac{4\pi}{\lambda^2}\left|\iint\limits_S d\,S\right|^2 = \frac{4\pi}{\lambda^2} S^2 = \frac{4\pi}{\lambda^2}\gamma^2 d_1^2 d_2^2,$$

где d_1, d_2 – размеры какого-либо прямоугольника, касательным образом охватывающего S, а параметр γ есть отношение S к $d_1 d_2$, так что $0 < \gamma \le 1$. С другой стороны, двумерные ЭПР касательных к S полос ("лент") с поперечными размерами d_1, d_2

$$\sigma_1^{II} = \frac{2\pi}{\lambda} d_1, \quad \sigma_2^{II} = \frac{2\pi}{\lambda} d_2,$$

и поэтому

[2] Речь идет о погонных ЭПР двух цилиндрических поверхностей, образующие которых взаимно перпендикулярны, а направляющие линии определены геометрией исходного объекта.

$$\sigma_S^{III} = \frac{\gamma^2}{\pi} \sigma_1^{II} \, \sigma_2^{II} \,. \qquad (1.148)$$

В частном случае кругового или эллиптического диска безразмерный коэффициент $\gamma^2/\pi = \pi/16$.

В заключение необходимо подчеркнуть, что сформулированное выше количественное соотношение, связывающее ЭПР реальных трехмерных объектов со значениями ЭПР двумерных моделей, строго установлено лишь по отношению к некоторым типам зондируемых объектов и при точно оговоренных, предположениях о направлениях зондирования и методике аппроксимации плотности поверхностного тока. В других же задачах, выходящих за пределы строго проведенных здесь рассмотрений, указанное соотношение можно рассматривать как эвристический подход к получению ориентировочных оценок величины ЭПР.