$$\vec{E}_\alpha \leftrightarrow \vec{H}_\alpha, \quad \vec{J}^e_\alpha \leftrightarrow -\vec{J}^m_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha \leftrightarrow \mu_\alpha \quad (\alpha = 1,2)$$

выводится равенство, справедливое для полей, возбуждаемых магнитными токами.

$$\int\limits_L \left[\varepsilon_2 \vec{E}_2^T \cdot \vec{H}_1^\perp - \varepsilon_1 \vec{E}_1^T \cdot \vec{H}_2^\perp\right] dS = j\omega \int\limits_V (\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2) \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 \, dV +$$
$$+ \int\limits_V \left\{\left[\varepsilon_2 \vec{J}_2^m - \left(\vec{\nabla}\varepsilon_2 \times \vec{E}_2\right)\right] \cdot \vec{H}_1 - \left[\varepsilon_1 \vec{J}_1^m - \left(\vec{\nabla}\varepsilon_1 \times \vec{E}_1\right)\right] \cdot \vec{H}_2\right\} dV. \qquad (1.3')$$

Формулы типа (1.3) и являются обобщением известной леммы Лоренца [4, 10] на случай неоднородных сред и полей, соответствующих двум различным материальным заполнениям рассматриваемой области V.

Если область V бесконечна, то (как и в обычной лемме Лоренца) для справедливости соотношений (1.3), (1.3') достаточно потребовать, чтобы сторонние токи были распределены лишь в какой-то конечной области, а поля удовлетворяли условиям излучения [4, 10].

Другая форма обобщения леммы Лоренца была получена в более поздних работах [11, 12].

1.2. Применение обобщенной леммы Лоренца к получению интегральных представлений возмущений, вносимых во вторичное излучение радиопрозрачными и поглощающими слоистыми структурами

Примем, что L есть совокупность поверхностей, ограничивающих извне идеально проводящие рассеиватели $V_1^+, V_2^+, \ldots, V_M^+$, а во внешней области V, характеризуемой проницаемостями $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$, задано распределение сторонних электрических токов с плотностью $\vec{J}^e(x)$ или, что равносильно, эквивалентных магнитных токов $\vec{J}^m(x)$. Соответствующее полное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ удовлетворяет условию

$$\vec{E}^T\Big|_L = 0. \tag{1.5}$$

Задача состоит в получении таких интегральных представлений поля $\vec{E}$, $\vec{H}$, которые позволяли бы эффективно оценивать роль отдельных рассеивателей либо роль физических свойств среды, заполняющей область V, в формировании этого поля. Для этого поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ сопоставляется с некоторыми вспомогательными ("эталонными") полями посредством обобщенной леммы Лоренца (1.3).

Введем в область V вспомогательное поле (поле "электрического типа") $\vec{\mathscr{E}}^e\left(x \,\middle|\, x_0, \vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}^e\left(x \,\middle|\, x_0, \vec{p}\right)$, удовлетворяющее в области V уравнениям

$$rot\vec{\mathscr{E}}^e = j\,\omega\,\mu_0\,\vec{\mathscr{H}}^e,$$
$$rot\vec{\mathscr{H}}^e = -j\,\omega\,\varepsilon_0\,\vec{\mathscr{E}}^e - j\,\omega\,\vec{p}\,\delta(x - x_0), \tag{1.6}$$

(ε_0, μ_0 – проницаемости свободного пространства, $x_0 \in V$) и тем или иным граничным условиям на L (формулируемым в каждом конкретном рассмотрении дополнительно). Аналогичным образом можно ввести поле "магнитного типа".

Рассмотрим случай, когда материальные среды (однородные или кусочно-однородные) распределены лишь в некоторой части T области V, дополнение же $V^- = V \setminus T$ есть область свободного пространства. Однородные среды отделены одна от другой и от области V^- гладкими поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_N$ [1], и таким образом, образуют слоистую структуру. Кроме того, рас-

[1] S_i – поверхности, замкнутые либо уходящие на бесконечность или же имеющие край (краевые линии), принадлежащий границе L области V.

смотрим только распределения сторонних источников в области V^-, где $\mu(x) \equiv \mu_0$, $\varepsilon(x) \equiv \varepsilon_0$. Применим далее в области V обобщенную лемму Лоренца к полю $\vec{E}_1 = \vec{E}(x)$, $\vec{H}_1 = \vec{H}(x)$, для которого $\varepsilon_1 = \varepsilon(x)$, $\mu_1 = \mu(x)$, $\vec{J}_1^e = \vec{J}^e(x)$ и к полю $\vec{E}_2 = \vec{\mathscr{E}}^e(x|x_0, \vec{p})$, $\vec{H}_2 = \vec{\mathscr{H}}^e(x|x_0, \vec{p})$, для которого $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$, $\vec{J}_2^e = -j\,\omega\,\vec{p}\,\delta(x - x_0)$ (при произвольной ориентации $\vec{p}$). При этом воспользуемся принципом суперпозиции и тем фактом, что вблизи S_i

$$\vec{\nabla}\mu = \vec{n}\frac{\partial \mu}{\partial n} = \vec{n}\left(\mu_i^+ - \mu_i^-\right)\delta(n) = \vec{n}\,\Delta\mu_i\delta(n),$$

$$\vec{\nabla}\varepsilon = \vec{n}\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \vec{n}\left(\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^-\right)\delta(n) = \vec{n}\,\Delta\varepsilon_i\delta(n). \tag{1.7}$$

Здесь $\vec{n}$ – орт нормали к S_i, n – координата, отсчитываемая по нормали, причем $n = 0$ на S_i, $n > 0$ в направлении $\vec{n}$, $\delta(n)$ – дельта-функция; μ_i^+, μ_i^- – предельные значения $\mu(x)$ на S_i соответственно со стороны положительных и отрицательных n.

Тогда, из (1.3) получим равенство

$$\begin{aligned} j\,\omega\,\mu_0\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}(x_0) - \vec{\mathscr{E}}(x_0)\right] &= \int_L \mu(x)\vec{\mathscr{E}}^{eT}(x\,|\,x_0, \vec{p})\cdot\vec{H}^{\perp}(x)dS + \\ &+ j\omega\int_T \left[\varepsilon(x)\mu(x) - \varepsilon_0\,\mu_0\right]\vec{E}(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}^e(x\,|\,x_0, \vec{p})dV - \\ &- \sum_{i=1}^{N}\Delta\mu_i\int_{S_i}\vec{\mathscr{E}}^{eT}(x\,|\,x_0, \vec{p})\cdot\vec{H}^{\perp}(x)dS. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Аналогичное интегральное представление вектора магнитной напряженности $\vec{H}$ выводится из (1.3'):

$$j\,\omega\,\varepsilon_0\,\vec{q}\cdot\left[\vec{H}(x_0)-\vec{\mathscr{H}}(x_0)\right] =$$
$$= j\omega\int_V\left[\varepsilon(x)\mu(x)-\varepsilon_0\,\mu_0\right]\vec{H}(x)\cdot\vec{\mathscr{H}}^m\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)dV -$$
$$-\varepsilon_0\int_L\vec{\mathscr{E}}^{mT}\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)dS +$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\Delta\varepsilon_i\int_{S_i}\vec{\mathscr{H}}^{mT}\left(x\,|\,x_0,\vec{q}\right)\cdot\vec{E}^{\perp}(x)dS. \qquad (1.8')$$

Здесь $\vec{\mathscr{E}}(x_0)$, $\vec{\mathscr{H}}(x_0)$ – векторы электрической и магнитной напряженности эталонного поля, возбуждаемого в области пространства V теми же сторонними источниками, которые в реальной среде, заполняющей V, возбуждают поле $\vec{E}(x_0)$, $\vec{H}(x_0)$, однако при других граничных условиях на L, определяемых структурой и граничными свойствами выбранного вспомогательного поля точечного источника, например для $\vec{\mathscr{E}}(x_0)$, в соответствии с формулой

$$-j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{\mathscr{E}}(x_0)=\int_{V^-}\vec{J}^e(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}^e\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)dV.$$

Если теперь в представлении (1.8) положить $\vec{x}_0=|\vec{x}_0|\vec{r}^{\,0}$ и $|\vec{x}_0|\to\infty$, то получим интегральное представление для векторной комплексной диаграммы направленности $\vec{E}\left(\vec{r}^{\,0}\right)$:

$$j\,\omega\,\mu_0\vec{p}\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}^{\,0}\right)-\vec{\mathscr{E}}\left(\vec{r}^{\,0}\right)\right] = \int_L\mu(x)\vec{\mathscr{E}}^{eT}\left(x\,|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)dS +$$
$$+ j\omega\int_T\left[\varepsilon(x)\mu(x)-\varepsilon_0\,\mu_0\right]\vec{E}(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}^e\left(x\,|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)dV -$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\Delta\mu_i\int_{S_i}\vec{\mathscr{E}}^{eT}\left(x\,|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)dS. \qquad (1.9)$$

В представлении (1.9) поле $\vec{\mathscr{E}}^{e}\left(x\middle|\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}^{e}\left(x\middle|\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)$ возбуждается плоской волной:

$$\vec{\mathscr{E}}_0^{e}\left(x\middle|\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)=k_0^2\omega\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\vec{p}-\vec{r}^{\,0}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}^{\,0}\right)\right]exp\left(-j\,k_0\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\right),$$

$$\vec{\mathscr{H}}_0^{e}\left(x\middle|\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)=-k_0^2\,\omega\left(\vec{r}^{\,0}\times\vec{p}\right)exp\left(-j\,k_0\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\right), \qquad (1.10)$$

где $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}$.

Если в качестве вспомогательного поля в (1.9) использовать решение уравнений (1.6), удовлетворяющее при $x_0\in V$ граничному условию

$$\vec{\mathscr{E}}^{eT}\left(x\,\middle|\,x_0,\vec{p}\right)\Big|_{x\in L}=0, \qquad (1.11)$$

то есть выбрать в качестве вспомогательного поля поле точечного источника, расположенного в точке x_0, с вектор-моментом $\vec{p}$ в присутствии идеально проводящих рассеивателей с поверхностью L, то представление (1.9) примет следующий вид:

$$j\,\omega\,\mu_0\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}^{\,0}\right)-\vec{\mathscr{E}}\left(\vec{r}^{\,0}\right)\right]=$$

$$=j\omega\int_T\left[\varepsilon(x)\mu(x)-\varepsilon_0\,\mu_0\right]\,\vec{E}(x)\cdot\vec{\mathscr{E}}^{e}\left(x\,\middle|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)\,dV-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\Delta\mu_i\int_{S_i}\vec{\mathscr{E}}^{eT}\left(x\,\middle|\,\vec{r}^{\,0},\vec{p}\right)\cdot\vec{H}^{\perp}(x)\,dS. \qquad (1.12)$$

Таким образом, в этом случае $\vec{\mathscr{E}}\left(x_0\right)$, $\vec{\mathscr{H}}\left(x_0\right)$ означает поле, возбуждаемое данными источниками при отсутствии материальных сред, а представление (1.12) дает выражение поправки, вносимой в дальней зоне наличием среды T .

В простейшем случае, когда $\mu \equiv \mu_0$, представление (1.9) приобретает особенно простой вид при любом $\vec{p}$ и $x_0 \in V$:

$$\vec{p} \cdot \left[\vec{E}(x_0) - \vec{\mathscr{E}}(x_0) \right] = (\varepsilon - \varepsilon_0) \int\limits_T \vec{E}(x) \cdot \vec{\mathscr{E}}^e\left(x \mid x_0, \vec{p} \right) dV. \qquad (1.13)$$

Из (1.13) получаем поправки к комплексной диаграмме направленности:

$$\vec{p} \cdot \left[\vec{E}\left(\vec{r}^{\,0}\right) - \vec{\mathscr{E}}\left(\vec{r}^{\,0}\right) \right] = (\varepsilon - \varepsilon_0) \int\limits_T \vec{E}(x) \cdot \vec{\mathscr{E}}^e\left(x \mid \vec{r}^{\,0}, \vec{p} \right) dV. \qquad (1.14)$$

Если поля $\vec{\mathscr{E}}(x_0)$, $\vec{\mathscr{E}}\left(x \mid x_0, \vec{p}\right)$ известны, то при $x_0 \in T$ равенство (1.13) есть интегральное уравнение относительно поля, возбуждаемого в среде T .

В этом случае, когда многообразие T представляет собой совокупность тонких слоев диэлектрика (толщина δ которой мала), из соотношения (1.13) могут быть получены асимптотические формулы, тем более точные, чем меньше безразмерный параметр $\overline{\delta} = \delta / \lambda_0$. При малом $\overline{\delta}$ интегральный член в (1.13), как следует ожидать из физических соображений, должен быть малым. Можно показать, что этот интеграл, равно как и вообще интеграл вида

$$I(x_0) = \int\limits_T \vec{F}(x) \cdot \vec{\mathscr{E}}^e\left(x \mid x_0, \vec{p}\right) dV$$

с гладкой в области T (вплоть до ее границы) вектор-функцией $\vec{F}(x)$, допускает при $x_0 \in T$ оценку

$$\left|\, I\left(x_0\right)\right| \le const\,\overline{\delta}.\ [1] \tag{1.15}$$

Из равенства (1.13) и оценки вида (1.15) следует, что при $x \in T$

$$\vec{E}\left(x\right) = \vec{\mathscr{E}}\left(x\right) + O\left(\overline{\delta}\right),$$

поэтому из (1.14) получаем

$$\vec{p}\cdot\left[\vec{E}\left(\vec{r}^{\,0}\right) - \vec{\mathscr{E}}\left(\vec{r}^{\,0}\right)\right] = \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\int\limits_T \vec{\mathscr{E}}\left(x\right)\cdot\vec{\mathscr{E}}^{\,e}\left(x \,|\, \vec{r}^{\,0}, \vec{p}\right) dV + o\left(\overline{\delta}\right). \tag{1.16}$$

Равенства типа (1.16) и могут служить расчетными формулами с оценкой погрешности $o\left(\overline{\delta}\right)$.

Рассмотрим еще одно из возможных применений обобщенной леммы Лоренца. Пусть некоторая идеально проводящая поверхность L покрыта слоем T радиопоглощающего материала (рис. 1.1) с проницаемостями ε_1, μ_1.

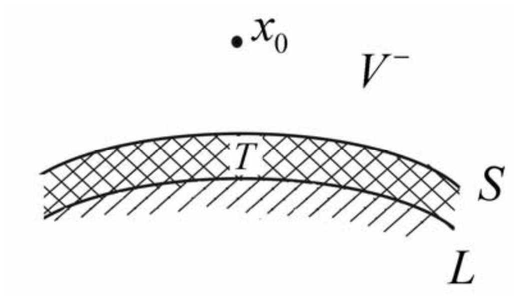

Рис. 1.1. Идеально проводящая поверхность, покрытая слоем радиопоглощающего материала

[1] Оценка (1.15) нетривиальна, ибо ее получение основано (в конечном счете) на оценивании сингулярных интегралов вида $\int\limits_T \Phi\left(x\right)\dfrac{-\vec{p}+3\left(\vec{p}\cdot\vec{R}^0\right)\vec{R}^0}{R^3}\,dV$,

где $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}_0$, $R = \left|\vec{R}\right|$, $\vec{R}^0 = \vec{R}\,/\,R$.

Пусть, далее, известно поле $\left(\vec{\mathscr{E}}_2, \vec{\mathscr{H}}_2\right)$, порожденное электрическим диполем $\vec{J}_2^e = -j\,\omega\,\vec{p}\,\delta\left(x - x_0\right)$ [1] в присутствии указанной рассеивающей поверхности, но для проницаемостей материала слоя T ε_2, μ_2. Необходимо определить поле $\vec{E}_1$, порожденное сторонними источниками (с плотностью тока $\vec{J}_1^e$), расположенными в области V^-, в присутствии радиопоглощающего слоя T на металлической подложке L. При этом известно, что значение ε_1 близко к ε_2, а μ_1 к μ_2.

Пусть точка наблюдения $x_0 \in V^-$. Применим обобщенную лемму Лоренца (1.3) к полям $\left(\vec{E}_1, \vec{H}_1\right)$ и $\left(\vec{\mathscr{E}}_2, \vec{\mathscr{H}}_2\right)$ в области $V = V^-$ с границей $\partial V = S$. В результате получим соотношение:

$$-j\,\omega\,\vec{p} \cdot \left[\vec{E}_1\left(x_0\right) - \vec{E}_2\left(x_0\right)\right] = \int\limits_S \left(\vec{E}_1^T \cdot \vec{\mathscr{H}}_2^\perp - \vec{\mathscr{E}}_2^T \cdot \vec{H}_1^\perp\right) dS\,. \qquad (1.17)$$

Пусть, далее, область $V = T$, а ее граница $\partial V = S \bigcup L$. Применение леммы (1.3) к тем же полям в этом случае дает

$$\int\limits_S \left\{\mu_2 \vec{E}_1^T \cdot \vec{\mathscr{H}}_2^\perp - \mu_1 \vec{\mathscr{E}}_2^T \cdot \vec{H}_1^\perp\right\} dS = j\,\omega\,\left(\varepsilon_1\,\mu_1 - \varepsilon_2\,\mu_2\right) \int\limits_T \vec{E}_1 \cdot \vec{\mathscr{E}}_2\, dV\,. \quad (1.18)$$

Домножая (1.17) на μ_1 и вычитая полученное равенство из (1.18), придем к соотношению:

---

[1] Отметим, что, воспользовавшись принципом суперпозиции, поле $\vec{E}_2$, порожденное заданным сторонним распределением тока $\vec{J}_1^e$, можно представить с помощью равенства:
$-j\,\omega\,\vec{p}\,\vec{E}_2\left(x_0\right) = \int\limits_V \vec{J}_1^e \cdot \vec{\mathscr{E}}_2\left(x \,\middle|\, x_0, \vec{p}\right) dV$, где V содержит все сторонние источники излучения.

$$j\,\omega\,\mu_1\,\vec{p}\left[\vec{E}_1(x_0)-\vec{E}_2(x_0)\right]=(\mu_2-\mu_1)\int_S \vec{E}_1^T\cdot\vec{\mathscr{H}}_2^{\perp}\,dS-$$

$$-\,j\,\omega\,(\varepsilon_1\,\mu_1-\varepsilon_2\,\mu_2)\int_T \vec{E}_1\cdot\vec{\mathscr{E}}_2\,dV. \qquad (1.19)$$

Проделав аналогичные преобразования в случае, когда $x_0 \in T$, получим интегральное уравнение для поля $\vec{E}_1$ в слое T:

$$-\,j\,\omega\,\vec{p}\left\{\mu_2\vec{E}_1(x_0)-\mu_1\vec{E}_2(x_0)\right\}=(\mu_2-\mu_1)\int_S \vec{E}_1^T\cdot\vec{\mathscr{H}}_2^{\perp}\,dS-$$

$$-\,j\,\omega\,(\varepsilon_1\,\mu_1-\varepsilon_2\,\mu_2)\int_T \vec{E}_1\cdot\vec{\mathscr{E}}_2\,dV. \qquad (1.20)$$

Из уравнения (1.20) с учетом малости величин $|\mu_1-\mu_2|$, $|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$ можно получить асимптотическое представление для поля $\vec{E}_1(x_0)$ при $x_0 \in T$. Главный член этой асимптотики, очевидно, имеет вид

$$\vec{E}_1(x_0)\sim\frac{\mu_1}{\mu_2}\vec{E}_2(x_0). \qquad (1.21)$$

Проведя один раз итерирование уравнения (1.20), подставив с этой целью (1.21) в подынтегральное выражение правой части (1.20), получим уточненное асимптотическое представление поля $\vec{E}_1(x_0)$ в слое T:

$$-\,j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}_1(x_0)\sim-\,j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}_2(x_0)\cdot\frac{\mu_1}{\mu_2}+$$

$$+\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\frac{\mu_1}{\mu_2}\int_S \vec{E}_2^T\cdot\vec{\mathscr{H}}_2^{\perp}\,dS-j\,\omega\left(\varepsilon_1\frac{\mu_1}{\mu_2}-\varepsilon_2\right)\frac{\mu_1}{\mu_2}\int_T \vec{E}_2\cdot\vec{\mathscr{E}}_2\,dV. \qquad (1.22)$$

Использовав соотношение (1.22) в правой части (1.19), получим выражение для поля $\vec{E}_1(x_0)$ при $x_0 \in V^-$, которое дает возможность находить поле $\vec{E}_1$ в области, внешней по отношению к рассеивающей поверхности, через значения полей $\vec{E}_2$, $\vec{\mathscr{E}}_2$, $\vec{\mathscr{H}}_2$, получающихся при другом материальном заполнении области T.

В заключение отметим, что круг возможных практических приложений приведенного в разделе 1.1 обобщения леммы Лоренца довольно широк. Например, интегральное представление (1.8) можно применить не только к структуре, состоящей из идеально проводящих рассеивателей и поглощающих сред, но и к оценке влияния радиопрозрачных оболочек (например, обтекателей) на прохождение и рассеяние электромагнитных волн.

1.3. Обобщенный принцип зеркальных изображений и его приложения к решению некоторых задач рассеяния волн

Основное содержание настоящего раздела составляет описание строгих и физически интерпретируемых математических моделей рассеяния для различных типов рассеивающих объектов (идеальных проводников, идеальных магнетиков, идеально поглощающих объектов), находящихся над подстилающей поверхностью, а также математической модели апертурной антенны, закрытой какой-либо радиопрозрачной конструкцией (обтекателем, антенным укрытием и т.п.). В связи с решением последней задачи в разделе дано также обобщение принадлежащей Я.Н. Фельду [13] принципиально важной трактовки метода эквивалентных токов для расчета поля апертурной антенны на тот случай, когда антенна излучает в полупространство, содержащее рассеиватели-диэлектрики, проводники, магнетики. При этом оказалось необходимым надлежащим образом обобщить классический принцип зеркальных изображений.