Использовав соотношение (1.22) в правой части (1.19), получим выражение для поля $\vec{E}_1(x_0)$ при $x_0 \in V^-$, которое дает возможность находить поле $\vec{E}_1$ в области, внешней по отношению к рассеивающей поверхности, через значения полей $\vec{E}_2$, $\vec{\mathscr{E}}_2$, $\vec{\mathscr{H}}_2$, получающихся при другом материальном заполнении области T.

В заключение отметим, что круг возможных практических приложений приведенного в разделе 1.1 обобщения леммы Лоренца довольно широк. Например, интегральное представление (1.8) можно применить не только к структуре, состоящей из идеально проводящих рассеивателей и поглощающих сред, но и к оценке влияния радиопрозрачных оболочек (например, обтекателей) на прохождение и рассеяние электромагнитных волн.

1.3. Обобщенный принцип зеркальных изображений и его приложения к решению некоторых задач рассеяния волн

Основное содержание настоящего раздела составляет описание строгих и физически интерпретируемых математических моделей рассеяния для различных типов рассеивающих объектов (идеальных проводников, идеальных магнетиков, идеально поглощающих объектов), находящихся над подстилающей поверхностью, а также математической модели апертурной антенны, закрытой какой-либо радиопрозрачной конструкцией (обтекателем, антенным укрытием и т.п.). В связи с решением последней задачи в разделе дано также обобщение принадлежащей Я.Н. Фельду [13] принципиально важной трактовки метода эквивалентных токов для расчета поля апертурной антенны на тот случай, когда антенна излучает в полупространство, содержащее рассеиватели-диэлектрики, проводники, магнетики. При этом оказалось необходимым надлежащим образом обобщить классический принцип зеркальных изображений.

1.3.1. Обобщенный принцип зеркальных изображений

Введем обозначение полупространства $\Omega^+(x_3 > 0)$ и его зеркального изображения $\Omega^-(x_3 < 0)$. Область Ω^+ содержит:

а) идеально проводящие рассеиватели, совокупность граничных поверхностей которых обозначаем как S_E, так что

$$\vec{E}^T\Big|_{S_E} = 0;$$

б) рассеиватели – идеальные магнетики, на граничной поверхности которых (S_H)

$$\vec{H}^T\Big|_{S_H} = 0;$$

при этом часть Ω_1^+, полупространства Ω^+, граница которой состоит из плоскости $S(x_3 = 0)$, S_E, S_H заполнена изотропной и, вообще говоря, неоднородной средой с комплексными проницаемостями $\varepsilon(\vec{x})$, $\mu(\vec{x})$, которые могут иметь и поверхности разрыва непрерывности (границы раздела).

Введем также обозначение Ω_1^-, для зеркального изображения области Ω_1^+ в плоскости S и рассмотрим "симметризованную" область $\Omega_1 = \Omega_1^+ \cup S \cup \Omega_1^-$ с симметричными по геометрической конфигурации и физическим свойствам рассеивателями и заполняющей средой, в которой

$$\begin{cases} \varepsilon(x_1, x_2, -x_3) \equiv \varepsilon(x_1, x_2, x_3) \\ \mu(x_1, x_2, -x_3) \equiv \mu(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \tag{1.25}$$

Введем необходимую символику: если $\vec{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ – какое-либо векторное поле, то $\vec{A}' = \{A_1, A_2, -A_3\}$; в частности, если радиус-вектор точки $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, то $\vec{x}' = (x_1, x_2, -x_3)$. Тогда имеет место следующее утверждение ("обобщенный принцип зеркальных изображений").

Пусть $\vec{\mathscr{E}}_0\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)$, $\vec{\mathscr{H}}_0\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right)$ – поле, возбуждаемое в симметризованной области Ω_1 электрическим диполем момента $\vec{p}$, расположенным в точке $x_0 \in \Omega_1$. Тогда для каждой точки $x \in \Omega_1$ имеют место равенства

$$\vec{\mathscr{E}}_0\left(x\,|\,x_0',\vec{p}\,'\right)=\vec{\mathscr{E}}_0'\left(x'\,|\,x_0,\vec{p}\right), \tag{1.26}$$

$$\vec{\mathscr{H}}_0\left(x\,|\,x_0',\vec{p}\,'\right)=-\vec{\mathscr{H}}_0'\left(x'\,|\,x_0,\vec{p}\right), \tag{1.27}$$

которые и выражают обобщенный принцип зеркальных изображений.

Строгий вывод этих равенств (вполне естественный с точки зрения физической интуиции) может быть основан на следующем, легко проверяемом соотношении:

$$rot\,\vec{A}'\left(x'\right)=-\left(rot\,\vec{A}\left(x\right)\right)'\Big|_{x\Rightarrow x'} \tag{1.28}$$

(символ $x\Rightarrow x'$ означает здесь, что, вычислив вектор $-\left(rot\,\vec{A}\left(x\right)\right)'$, нужно заменить x на x'). Введем краткие обозначения:

$$\vec{\mathscr{E}}_0(x)=\vec{\mathscr{E}}_0\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right),\ \vec{\mathscr{H}}_0(x)=\vec{\mathscr{H}}_0\left(x\,|\,x_0,\vec{p}\right),$$

$$\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)}(x)=\vec{\mathscr{E}}_0'\left(x'\,|\,x_0,\vec{p}\right),\ \vec{\mathscr{H}}_0^{(1)}(x)=-\vec{\mathscr{H}}_0'\left(x'\,|\,x_0,\vec{p}\right).$$

Тогда из уравнений Максвелла

$$rot\,\vec{\mathscr{E}}_0(x)=j\,\omega\,\mu(x)\vec{\mathscr{H}}_0(x)\,,$$

$$rot\,\vec{\mathscr{H}}_0(x)=-j\,\omega\,\varepsilon(x)\vec{\mathscr{E}}_0(x)-j\,\omega\,\vec{p}\,\delta\left(x-x_0\right)\,.$$

Воспользовавшись соотношениями (1.25), (1.28), выводим

$$rot\,\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)}(x) = rot\,\vec{\mathscr{E}}_0'(x') = -\left(rot\,\vec{\mathscr{E}}_0(x)\right)'\Big|_{x \Rightarrow x'} =$$

$$= -j\,\omega\,\mu(x')\vec{\mathscr{H}}_0'(x') = j\,\omega\,\mu(x)\vec{\mathscr{H}}_0^{(1)}(x); \qquad (1.29)$$

аналогично получается

$$rot\,\vec{\mathscr{H}}_0^{(1)}(x) = -j\,\omega\,\varepsilon(x)\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)}(x) - j\,\omega\,\vec{p}'\delta(x - x_0'). \qquad (1.30)$$

Таким образом, $\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)}(x)$, $\vec{\mathscr{H}}_0^{(1)}(x)$ есть поле, возбуждаемое током $\vec{J}_0(x) = -j\,\omega\,\vec{p}'\,\delta(x - x_0')$. Далее непосредственно проверяется выполнение граничных условий на S_E, S_H и на их зеркальных изображениях.

Например, так как на S_E $\vec{\mathscr{E}}_0(x) = \vec{n}\,\mathscr{E}_{0n}(x)$ ($\vec{n}$ – орт нормали), то $\vec{\mathscr{E}}_0'(x) = \vec{n}'\,\mathscr{E}_{0n}(x')$, откуда $\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)}(x)\Big|_{S_E} = \vec{\mathscr{E}}_0'(x') = \vec{n}\,\mathscr{E}_{0n}(x)$ и, следовательно, $\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)T}\Big|_{S_E} = 0$.

Наконец, поле $\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)}(x)$, $\vec{\mathscr{H}}_0^{(1)}(x)$, очевидно, удовлетворяет (в случае неограниченной области Ω_1) и условиям излучения.

В силу единственности рассматриваемой здесь граничной задачи из уравнений (1.29), (1.30), граничных соотношений на S_E, S_H и на их зеркальных изображениях (и условий излучения, если Ω_1 неограничена) получаем, что поле $\vec{\mathscr{E}}_0^{(1)}(x)$, $\vec{\mathscr{H}}_0^{(1)}(x)$ совпадает с полем $\vec{\mathscr{E}}_0(x\,|\,x_0', \vec{p}')$, $\vec{\mathscr{H}}_0(x\,|\,x_0', \vec{p}')$, что и доказывает наше утверждение.

По поводу этого утверждения необходимо сделать следующие замечания. Во-первых, аналогичное утверждение справедливо и для полей, возбуждаемых магнитными диполями.

Во-вторых, с помощью принципа суперпозиции и интегрального представления

$$\vec{J}(x) = \int\limits_{\Omega_1} \vec{J}(x_0)\delta(x - x_0)\,dV_{x_0}$$

принцип зеркальных изображений в приведенной выше форме (примененный в [14 – 16]) переносится на поля, возбуждаемые любыми сторонними токами.

1.3.2. О расчете влияния подстилающей поверхности на рассеивающие свойства цели

Пусть плоскость Σ (будем считать ее идеально проводящей) ограничивает полупространство, содержащее рассеивающий объект с граничной поверхностью S (идеальный проводник либо идеальный магнетик).

Стандартный метод получения интегрального уравнения для поверхностных токов, возбуждаемых заданными сторонними источниками, расположенными в рассматриваемом полупространстве (метод, основанный на интегральных соотношениях типа Стрэттона-Чу [10]), приводит к уравнениям, содержащим не только интеграл по поверхности рассеивателя S, но и по безграничной плоскости Σ, что резко затрудняет численное решение. Применение же принципа зеркальных изображений в обобщенной форме позволяет получить токовое интегральное уравнение с интегрированием лишь по S, которое может служить основой для устойчивых и эффективных вычислительных алгоритмов. Ниже приводится соответствующий вывод.

Обозначим через Ω_1^+ область пространства, ограниченную поверхностями S и Σ. Область Ω_1^+ может содержать как неоднородности среды, так и другие рассеиватели.