Во-вторых, с помощью принципа суперпозиции и интегрального представления

$$\vec{J}(x) = \int\limits_{\Omega_1} \vec{J}(x_0)\delta(x - x_0)\,dV_{x_0}$$

принцип зеркальных изображений в приведенной выше форме (примененный в [14 – 16]) переносится на поля, возбуждаемые любыми сторонними токами.

1.3.2. О расчете влияния подстилающей поверхности на рассеивающие свойства цели

Пусть плоскость Σ (будем считать ее идеально проводящей) ограничивает полупространство, содержащее рассеивающий объект с граничной поверхностью S (идеальный проводник либо идеальный магнетик).

Стандартный метод получения интегрального уравнения для поверхностных токов, возбуждаемых заданными сторонними источниками, расположенными в рассматриваемом полупространстве (метод, основанный на интегральных соотношениях типа Стрэттона-Чу [10]), приводит к уравнениям, содержащим не только интеграл по поверхности рассеивателя S, но и по безграничной плоскости Σ, что резко затрудняет численное решение. Применение же принципа зеркальных изображений в обобщенной форме позволяет получить токовое интегральное уравнение с интегрированием лишь по S, которое может служить основой для устойчивых и эффективных вычислительных алгоритмов. Ниже приводится соответствующий вывод.

Обозначим через Ω_1^+ область пространства, ограниченную поверхностями S и Σ. Область Ω_1^+ может содержать как неоднородности среды, так и другие рассеиватели.

Введем обозначения:

$\vec{E}^i(x)$, $\vec{H}^i(x)$ – падающая на объект волна;

$\vec{E}_1(x)$, $\vec{H}_1(x)$ – рассеянное поле;

$\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$ – полное поле;

$\vec{\mathscr{E}}^e(x\,|\,x_0,\vec{p})$, $\vec{\mathscr{H}}^e(x\,|\,x_0,\vec{p})$ – поле точечного электрического диполя в полупространстве, ограниченном плоскостью Σ, при отсутствии объекта S;

$\vec{\mathscr{E}}^m(x\,|\,x_0,\vec{q})$, $\vec{\mathscr{H}}^m(x\,|\,x_0,\vec{q})$ – аналогичное поле точечного магнитного диполя.

Отметим, что с помощью введенного в п. 1.3.1 поля $\vec{\mathscr{E}}_0$, $\vec{\mathscr{H}}_0$ (поля, возбуждаемого в симметризованной области Ω_1 в отсутствие объекта S) поле $\vec{\mathscr{E}}^e$, $\vec{\mathscr{H}}^e$ может быть выражено следующим образом:

$$\vec{\mathscr{E}}^e = \vec{\mathscr{E}}_0(x\,|\,x_0,\vec{p}) - \vec{\mathscr{E}}_0(x\,|\,x_0',\vec{p}'), \tag{1.31}$$

$$\vec{\mathscr{H}}^e = \vec{\mathscr{H}}_0(x\,|\,x_0,\vec{p}) - \vec{\mathscr{H}}_0(x\,|\,x_0',\vec{p}'). \tag{1.32}$$

Это следует из того, что в силу (1.31), (1.26)

$$\vec{\mathscr{E}}^e = \vec{\mathscr{E}}_0(x\,|\,x_0,\vec{p}) - \vec{\mathscr{E}}_0'(x'\,|\,x_0,\vec{p});$$

откуда при $x \in \Sigma$

$$\left.\vec{\mathscr{E}}^{eT}\right|_\Sigma = 0.$$

Применив, далее, лемму Лоренца к полям $(\vec{E}_1,\vec{H}_1)$ и $(\vec{\mathscr{E}}^e,\vec{\mathscr{H}}^e)$, а также к полям $(\vec{E}_1,\vec{H}_1)$ и $(\vec{\mathscr{E}}^m,\vec{\mathscr{H}}^m)$, учитывая, что поле $(\vec{\mathscr{E}}^e,\vec{\mathscr{H}}^e)$ порождено током $\vec{J}^e = -j\,\omega\,\vec{p}\,\delta(x-x_0)$, а поле $(\vec{\mathscr{E}}^m,\vec{\mathscr{H}}^m)$ –

током $\vec{J}^m = -j\,\omega\,\vec{q}\,\delta(x - x_0)$ (причем, в первом случае $\vec{J}^m = 0$, а во втором – $\vec{J}^e = 0$), получим соотношения:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}_1(x_0) = \int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}_1\,\vec{\mathscr{H}}^e\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^e\,\vec{H}_1\,\vec{n}\right)\right]\,dS\,,^1 \qquad (1.33)$$

$$-\,j\,\omega\,\vec{q}\cdot\vec{H}_1(x_0) = \int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}_1\,\vec{\mathscr{H}}^m\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^e\,\vec{H}_1\,\vec{n}\right)\right]\,dS. \qquad (1.34)$$

Применив лемму Лоренца к полям $\left(\vec{E}^i, \vec{H}^i\right)$ и $\left(\vec{\mathscr{E}}^e, \vec{\mathscr{H}}^e\right)$, и к полям $\left(\vec{E}^i, \vec{H}^i\right)$ и $\left(\vec{\mathscr{E}}^m, \vec{\mathscr{H}}^m\right)$, получим

$$\int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}^i\,\vec{\mathscr{H}}^{(e,m)}\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^{(e,m)}\,\vec{H}^i\,\vec{n}\right)\right]\,dS = 0. \qquad (1.35)$$

Объединив соотношения (1.33), (1.34) с (1.35), получим представления полного поля:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}(x_0) - \vec{E}^i(x_0)\right] = \int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}\,\vec{\mathscr{H}}^e\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^e\,\vec{H}\,\vec{n}\right)\right]dS\,, \qquad (1.36)$$

$$-\,j\,\omega\,\vec{q}\cdot\left[\vec{H}(x_0) - \vec{H}^i(x_0)\right] = \int\limits_{S+\Sigma}\left[\left(\vec{E}\,\vec{\mathscr{H}}^m\,\vec{n}\right) - \left(\vec{\mathscr{E}}^m\,\vec{H}\,\vec{n}\right)\right]dS. \qquad (1.37)$$

Рассмотрим два случая:

A) S – поверхность идеального проводника; в этом случае

$$\left.\vec{E}^T\right|_{\Sigma} = 0\,, \quad \left.\vec{E}^T\right|_{S} = 0\,;$$

B) S – поверхность идеального магнетика; при этом

$$\left.\vec{H}^T\right|_{S} = 0\,, \quad \left.\vec{E}^T\right|_{\Sigma} = 0\,.$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем символ $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ означает смешанное произведение векторов

В случае A при $x_0 \in \Omega_1^+$ соотношения (1.36), (1.37) примут вид:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}(x_0)-\vec{E}^i(x_0)\right]=-\int_S\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,e}\,\vec{H}\,\vec{n}\right)dS\,, \tag{1.38}$$

$$-\,j\,\omega\,\vec{q}\cdot\left[\vec{H}(x_0)-\vec{H}^i(x_0)\right]=-\int_S\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,m}\,\vec{H}\,\vec{n}\right)dS\,, \tag{1.39}$$

а в случае B:

$$j\,\omega\,\vec{p}\cdot\left[\vec{E}(x_0)-\vec{E}^i(x_0)\right]=\int_S\left(\vec{E}\,\vec{\mathscr{H}}^e\,\vec{n}\right)dS\,, \tag{1.40}$$

$$-\,j\,\omega\vec{q}\cdot\left[\vec{H}(x_0)-\vec{H}^i(x_0)\right]=\int_S\left(\vec{E}\,\vec{\mathscr{H}}^m\,\vec{n}\right)dS\,. \tag{1.41}$$

Поля $\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,e},\vec{\mathscr{H}}^e\right)$, $\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,m},\vec{\mathscr{H}}^m\right)$ содержат в качестве аддитивной составляющей поле электрического (магнитного) диполя в свободном пространстве. Так, например,

$$\vec{\mathscr{H}}^e=\vec{H}_0^e+\vec{H}^{\,pac}\,,$$

где $\vec{H}^{\,pac}$ представляет собой регулярное поле, а

$$\vec{H}_0^e=j\,\omega\left(\vec{p}\times\vec{\nabla}g\right),$$

$$g=\frac{exp\left(j\,k_0\,|\,\vec{x}-\vec{x}_0|\right)}{4\,\pi|\,\vec{x}-\vec{x}_0|}\,.$$

Тогда

$$\left(\vec{E}\,\vec{H}_0^e\,\vec{n}\right)=-\,j\,\omega\,\vec{E}\left(\vec{p}\,\frac{\partial\,g}{\partial\,n}-\left(\vec{p}\cdot\vec{n}\right)\vec{\nabla}\,g\right)$$

и, если представить оператор $\vec{\nabla}$ в виде

$$\vec{\nabla} = \vec{n}\frac{\partial}{\partial n} + \vec{D},$$

где $\vec{D}$ – тангенциальный дифференциальный оператор, то

$$\left(\vec{E}\,\vec{H}_0^e\,\vec{n}\right) = -j\,\omega\,\vec{E}\cdot\left(\vec{p}^T\frac{\partial g}{\partial n} - \left(\vec{p}\cdot\vec{n}\right)\vec{D}\,g\right).$$

Отметим, что функция $\partial g/\partial n$ представляет собой ядро потенциала двойного слоя.

Если теперь воспользоваться тем, что на поверхности S в случае А $H_n\big|_S = 0$, а в случае В – $E_n\big|_S = 0$ (это вытекает из уравнений Максвелла и граничных условий на поверхности S), а также граничными свойствами потенциала двойного слоя и устремить точку x_0 к поверхности S, то из (1.39), (1.40) могут быть получены интегральные уравнения:

$$-\frac{1}{2}j\,\omega\,\vec{q}\cdot\vec{H}^{\,T}(x_0) + j\,\omega\,\vec{q}\cdot\vec{H}^{\,i}(x_0) = \int\limits_S\left(\vec{\mathscr{E}}^{\,m}\,\vec{H}^{\,T}\,\vec{n}\right)dS\,, \qquad (1.42)$$

$$\frac{1}{2}j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^{\,T}(x_0) - j\,\omega\,\vec{p}\cdot\vec{E}^{\,i}(x_0) = \int\limits_S\left(\vec{E}^{\,T}\,\vec{\mathscr{H}}^{e}\,\vec{n}\right)dS\,. \qquad (1.43)$$

Уравнения (1.42), (1.43) содержат лишь интегрирование по конечной поверхности S и поэтому представляют собой уравнения типа Фредгольма второго рода, которые допускают эффективное сведение к хорошо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений.

Решив интегральное уравнение (1.42), найдем $\vec{H}^T(x_0)$, и, подставив его в правую часть (1.38), (1.39), найдем поле $\vec{E}^A(x_0)$, $\vec{H}^A(x_0)$ для любого $x_0 \in \Omega_1^+$ в случае, когда S представляет собой поверхность идеального проводника. Аналогично, с помощью интегрального уравнения (1.43) и представлений (1.40), (1.41) определим поле $\vec{E}^B(x_0)$, $\vec{H}^B(x_0)$ для случая, когда S – поверхность идеального магнетика.

Воспользовавшись далее моделью Макдональда [17] идеально "черного" тела, можно получить поле, рассеянное рассматриваемым объектом (при наличии подстилающей поверхности) в предположении, что его поверхность S обладает свойствами идеально "черного" тела. Это поле

$$\vec{E}^C = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^A + \vec{E}^B\right), \quad \vec{H}^C = \frac{1}{2}\left(\vec{H}^A + \vec{H}^B\right) \tag{1.44}$$

возникает в результате облучения первичной волной $\vec{E}^i$, $\vec{H}^i$ идеально поглощающего (в трактовке Макдональда) объекта при наличии подстилающей плоскости и неоднородностей среды.

1.3.3. Расчет поля, возбуждаемого излучающей апертурой в присутствии произвольной системы рассеивателей

Пусть апертура S_0 расположена в плоскости $S\left(x_3 = 0\right)$ и излучает в полупространство $\Omega^+\left(x_3 > 0\right)$ поле $\vec{E}\left(x\right)$, $\vec{H}\left(x\right)$, порождаемое сторонними источниками, которые расположены в полупространстве $\Omega^-\left(x_3 < 0\right)$. Область Ω^+ содержит:

а) идеально проводящие рассеиватели, совокупность граничных поверхностей которых обозначим как S_E, так что

$$\left.\vec{E}^T\right|_{S_E} = 0; \tag{1.45}$$

б) рассеиватели – идеальные магнетики, на граничной поверхности которых $\left(S_H\right)$