

Используя соотношение (1.22) в правой части (1.19), получим выражение для поля  $\vec{E}_1(x_0)$  при  $x_0 \in V^-$ , которое дает возможность находить поле  $\vec{E}_1$  в области, внешней по отношению к рассеивающей поверхности, через значения полей  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{\mathcal{E}}_2$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_2$ , получающихся при другом материальном заполнении области  $T$ .

В заключение отметим, что круг возможных практических приложений приведенного в разделе 1.1 обобщения леммы Лоренца довольно широк. Например, интегральное представление (1.8) можно применить не только к структуре, состоящей из идеально проводящих рассеивателей и поглощающих сред, но и к оценке влияния радиопрозрачных оболочек (например, обтекателей) на прохождение и рассеяние электромагнитных волн.

### 1.3. Обобщенный принцип зеркальных изображений и его приложения к решению некоторых задач рассеяния волн

Основное содержание настоящего раздела составляет описание строгих и физически интерпретируемых математических моделей рассеяния для различных типов рассеивающих объектов (идеальных проводников, идеальных магнетиков, идеально поглощающих объектов), находящихся над подстилающей поверхностью, а также математической модели апертурной антенны, закрытой какой-либо радиопрозрачной конструкцией (обтекателем, антенным укрытием и т.п.). В связи с решением последней задачи в разделе дано также обобщение принадлежащей Я.Н. Фельду [13] принципиально важной трактовки метода эквивалентных токов для расчета поля апертурной антенны на тот случай, когда антенна излучает в полупространство, содержащее рассеиватели-диэлектрики, проводники, магнетики. При этом оказалось необходимым надлежащим образом обобщить классический принцип зеркальных изображений.

### 1.3.1. Обобщенный принцип зеркальных изображений

Введем обозначение полупространства  $\Omega^+(x_3 > 0)$  и его зеркального изображения  $\Omega^-(x_3 < 0)$ . Область  $\Omega^+$  содержит:

а) идеально проводящие рассеиватели, совокупность граничных поверхностей которых обозначаем как  $S_E$ , так что

$$\vec{E}^T \Big|_{S_E} = 0;$$

б) рассеиватели – идеальные магнетики, на граничной поверхности которых ( $S_H$ )

$$\vec{H}^T \Big|_{S_H} = 0;$$

при этом часть  $\Omega_1^+$ , полупространства  $\Omega^+$ , граница которой состоит из плоскости  $S(x_3 = 0)$ ,  $S_E$ ,  $S_H$  заполнена изотропной и, вообще говоря, неоднородной средой с комплексными проницаемостями  $\varepsilon(\vec{x})$ ,  $\mu(\vec{x})$ , которые могут иметь и поверхности разрыва непрерывности (границы раздела).

Введем также обозначение  $\Omega_1^-$ , для зеркального изображения области  $\Omega_1^+$  в плоскости  $S$  и рассмотрим "симметризованную" область  $\Omega_1 = \Omega_1^+ \cup S \cup \Omega_1^-$  с симметричными по геометрической конфигурации и физическим свойствам рассеивателями и заполняющей средой, в которой

$$\begin{cases} \varepsilon(x_1, x_2, -x_3) \equiv \varepsilon(x_1, x_2, x_3) \\ \mu(x_1, x_2, -x_3) \equiv \mu(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (1.25)$$

Введем необходимую символику: если  $\vec{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$  – какое-либо векторное поле, то  $\vec{A}' = \{A_1, A_2, -A_3\}$ ; в частности, если радиус-вектор точки  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , то  $\vec{x}' = (x_1, x_2, -x_3)$ . Тогда имеет

место следующее утверждение ("обобщенный принцип зеркальных изображений").

Пусть  $\vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p})$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p})$  – поле, возбуждаемое в симметризованной области  $\Omega_1$  электрическим диполем момента  $\vec{p}$ , расположенным в точке  $x_0 \in \Omega_1$ . Тогда для каждой точки  $x \in \Omega_1$  имеют место равенства

$$\vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p}') = \vec{\mathcal{E}}_0'(x'|x_0, \vec{p}), \quad (1.26)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p}') = -\vec{\mathcal{H}}_0'(x'|x_0, \vec{p}), \quad (1.27)$$

которые и выражают обобщенный принцип зеркальных изображений.

Строгий вывод этих равенств (вполне естественный с точки зрения физической интуиции) может быть основан на следующем, легко проверяемом соотношении:

$$\text{rot } \vec{A}'(x') = -\left(\text{rot } \vec{A}(x)\right)' \Big|_{x \Rightarrow x'} \quad (1.28)$$

(символ  $x \Rightarrow x'$  означает здесь, что, вычислив вектор  $-\left(\text{rot } \vec{A}(x)\right)'$ , нужно заменить  $x$  на  $x'$ ). Введем краткие обозначения:

$$\vec{\mathcal{E}}_0(x) = \vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p}), \quad \vec{\mathcal{H}}_0(x) = \vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p}),$$

$$\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x) = \vec{\mathcal{E}}_0'(x'|x_0, \vec{p}), \quad \vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x) = -\vec{\mathcal{H}}_0'(x'|x_0, \vec{p}).$$

Тогда из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}}_0(x) = j \omega \mu(x) \vec{\mathcal{H}}_0(x),$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}}_0(x) = -j \omega \varepsilon(x) \vec{\mathcal{E}}_0(x) - j \omega \vec{p} \delta(x - x_0).$$

Воспользовавшись соотношениями (1.25), (1.28), выводим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x) &= \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}}_0'(x') = - \left( \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}}_0(x) \right) \Big|_{x \rightarrow x'} = \\ &= -j \omega \mu(x') \vec{\mathcal{H}}_0'(x') = j \omega \mu(x) \vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x); \end{aligned} \quad (1.29)$$

аналогично получается

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x) = -j \omega \varepsilon(x) \vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x) - j \omega \vec{p}' \delta(x - x_0'). \quad (1.30)$$

Таким образом,  $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x)$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x)$  есть поле, возбуждаемое током  $\vec{J}_0(x) = -j \omega \vec{p}' \delta(x - x_0')$ . Далее непосредственно проверяется выполнение граничных условий на  $S_E$ ,  $S_H$  и на их зеркальных изображениях.

Например, так как на  $S_E$   $\vec{\mathcal{E}}_0(x) = \vec{n} \varepsilon_{0n}(x)$  ( $\vec{n}$  – орт нормали), то  $\vec{\mathcal{E}}_0'(x) = \vec{n}' \varepsilon_{0n}(x')$ , откуда  $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x) \Big|_{S_E} = \vec{\mathcal{E}}_0'(x') = \vec{n} \varepsilon_{0n}(x)$  и, следовательно,  $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)T} \Big|_{S_E} = 0$ .

Наконец, поле  $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x)$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x)$ , очевидно, удовлетворяет (в случае неограниченной области  $\Omega_1$ ) и условиям излучения.

В силу единственности рассматриваемой здесь граничной задачи из уравнений (1.29), (1.30), граничных соотношений на  $S_E$ ,  $S_H$  и на их зеркальных изображениях (и условий излучения, если  $\Omega_1$  неограничена) получаем, что поле  $\vec{\mathcal{E}}_0^{(1)}(x)$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0^{(1)}(x)$  совпадает с полем  $\vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0', \vec{p}')$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0', \vec{p}')$ , что и доказывает наше утверждение.

По поводу этого утверждения необходимо сделать следующие замечания. Во-первых, аналогичное утверждение справедливо и для полей, возбуждаемых магнитными диполями.

Во-вторых, с помощью принципа суперпозиции и интегрального представления

$$\vec{J}(x) = \int_{\Omega_1} \vec{J}(x_0) \delta(x - x_0) dV_{x_0}$$

принцип зеркальных изображений в приведенной выше форме (примененный в [14 – 16]) переносится на поля, возбуждаемые любыми сторонними токами.

### 1.3.2. О расчете влияния подстилающей поверхности на рассеивающие свойства цели

Пусть плоскость  $\Sigma$  (будем считать ее идеально проводящей) ограничивает полупространство, содержащее рассеивающий объект с граничной поверхностью  $S$  (идеальный проводник либо идеальный магнетик).

Стандартный метод получения интегрального уравнения для поверхностных токов, возбуждаемых заданными сторонними источниками, расположенными в рассматриваемом полупространстве (метод, основанный на интегральных соотношениях типа Стрэттона-Чу [10]), приводит к уравнениям, содержащим не только интеграл по поверхности рассеивателя  $S$ , но и по безграничной плоскости  $\Sigma$ , что резко затрудняет численное решение. Применение же принципа зеркальных изображений в обобщенной форме позволяет получить токовое интегральное уравнение с интегрированием лишь по  $S$ , которое может служить основой для устойчивых и эффективных вычислительных алгоритмов. Ниже приводится соответствующий вывод.

Обозначим через  $\Omega_1^+$  область пространства, ограниченную поверхностями  $S$  и  $\Sigma$ . Область  $\Omega_1^+$  может содержать как неоднородности среды, так и другие рассеиватели.

Введем обозначения:

$\vec{E}^i(x), \vec{H}^i(x)$  – падающая на объект волна;

$\vec{E}_1(x), \vec{H}_1(x)$  – рассеянное поле;

$\vec{E}(x), \vec{H}(x)$  – полное поле;

$\vec{\mathcal{E}}^e(x|x_0, \vec{p}), \vec{\mathcal{H}}^e(x|x_0, \vec{p})$  – поле точечного электрического

диполя в полупространстве, ограниченном плоскостью  $\Sigma$ , при отсутствии объекта  $S$ ;

$\vec{\mathcal{E}}^m(x|x_0, \vec{q}), \vec{\mathcal{H}}^m(x|x_0, \vec{q})$  – аналогичное поле точечного

магнитного диполя.

Отметим, что с помощью введенного в п. 1.3.1 поля  $\vec{\mathcal{E}}_0, \vec{\mathcal{H}}_0$  (поля, возбуждаемого в симметризованной области  $\Omega_1$  в отсутствие объекта  $S$ ) поле  $\vec{\mathcal{E}}^e, \vec{\mathcal{H}}^e$  может быть выражено следующим образом:

$$\vec{\mathcal{E}}^e = \vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p}) - \vec{\mathcal{E}}_0(x|x'_0, \vec{p}'), \quad (1.31)$$

$$\vec{\mathcal{H}}^e = \vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p}) - \vec{\mathcal{H}}_0(x|x'_0, \vec{p}'). \quad (1.32)$$

Это следует из того, что в силу (1.31), (1.26)

$$\vec{\mathcal{E}}^e = \vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p}) - \vec{\mathcal{E}}_0'(x'|x_0, \vec{p});$$

откуда при  $x \in \Sigma$

$$\vec{\mathcal{E}}^{eT} \Big|_{\Sigma} = 0.$$

Применив, далее, лемму Лоренца к полям  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  и  $(\vec{\mathcal{E}}^e, \vec{\mathcal{H}}^e)$ , а также к полям  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  и  $(\vec{\mathcal{E}}^m, \vec{\mathcal{H}}^m)$ , учитывая, что поле  $(\vec{\mathcal{E}}^e, \vec{\mathcal{H}}^e)$  порождено током  $\vec{J}^e = -j\omega\vec{p}\delta(x-x_0)$ , а поле  $(\vec{\mathcal{E}}^m, \vec{\mathcal{H}}^m)$  –

током  $\vec{J}^m = -j \omega \vec{q} \delta(x - x_0)$  (причем, в первом случае  $\vec{J}^m = 0$ , а во втором –  $\vec{J}^e = 0$ ), получим соотношения:

$$j \omega \vec{p} \cdot \vec{E}_1(x_0) = \int_{S+\Sigma} \left[ (\vec{E}_1 \vec{\mathcal{H}}^e \vec{n}) - (\vec{\mathcal{E}}^e \vec{H}_1 \vec{n}) \right] dS, \quad (1.33)$$

$$-j \omega \vec{q} \cdot \vec{H}_1(x_0) = \int_{S+\Sigma} \left[ (\vec{E}_1 \vec{\mathcal{H}}^m \vec{n}) - (\vec{\mathcal{E}}^e \vec{H}_1 \vec{n}) \right] dS. \quad (1.34)$$

Применив лемму Лоренца к полям  $(\vec{E}^i, \vec{H}^i)$  и  $(\vec{\mathcal{E}}^e, \vec{\mathcal{H}}^e)$ , и к полям  $(\vec{E}^i, \vec{H}^i)$  и  $(\vec{\mathcal{E}}^m, \vec{\mathcal{H}}^m)$ , получим

$$\int_{S+\Sigma} \left[ (\vec{E}^i \vec{\mathcal{H}}^{(e,m)} \vec{n}) - (\vec{\mathcal{E}}^{(e,m)} \vec{H}^i \vec{n}) \right] dS = 0. \quad (1.35)$$

Объединив соотношения (1.33), (1.34) с (1.35), получим представления полного поля:

$$j \omega \vec{p} \cdot [\vec{E}(x_0) - \vec{E}^i(x_0)] = \int_{S+\Sigma} \left[ (\vec{E} \vec{\mathcal{H}}^e \vec{n}) - (\vec{\mathcal{E}}^e \vec{H} \vec{n}) \right] dS, \quad (1.36)$$

$$-j \omega \vec{q} \cdot [\vec{H}(x_0) - \vec{H}^i(x_0)] = \int_{S+\Sigma} \left[ (\vec{E} \vec{\mathcal{H}}^m \vec{n}) - (\vec{\mathcal{E}}^m \vec{H} \vec{n}) \right] dS. \quad (1.37)$$

Рассмотрим два случая:

А)  $S$  – поверхность идеального проводника; в этом случае

$$\vec{E}^T|_{\Sigma} = 0, \quad \vec{E}^T|_S = 0;$$

В)  $S$  – поверхность идеального магнетика; при этом

$$\vec{H}^T|_S = 0, \quad \vec{E}^T|_{\Sigma} = 0.$$

---

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем символ  $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$  означает смешанное произведение векторов

В случае А при  $x_0 \in \Omega_1^+$  соотношения (1.36), (1.37) примут вид:

$$j \omega \vec{p} \cdot [\vec{E}(x_0) - \vec{E}^i(x_0)] = - \int_S (\vec{\mathcal{E}}^e \vec{H} \vec{n}) dS, \quad (1.38)$$

$$- j \omega \vec{q} \cdot [\vec{H}(x_0) - \vec{H}^i(x_0)] = - \int_S (\vec{\mathcal{E}}^m \vec{H} \vec{n}) dS, \quad (1.39)$$

а в случае В:

$$j \omega \vec{p} \cdot [\vec{E}(x_0) - \vec{E}^i(x_0)] = \int_S (\vec{E} \vec{\mathcal{H}}^e \vec{n}) dS, \quad (1.40)$$

$$- j \omega \vec{q} \cdot [\vec{H}(x_0) - \vec{H}^i(x_0)] = \int_S (\vec{E} \vec{\mathcal{H}}^m \vec{n}) dS. \quad (1.41)$$

Поля  $(\vec{\mathcal{E}}^e, \vec{\mathcal{H}}^e)$ ,  $(\vec{\mathcal{E}}^m, \vec{\mathcal{H}}^m)$  содержат в качестве аддитивной составляющей поле электрического (магнитного) диполя в свободном пространстве. Так, например,

$$\vec{\mathcal{H}}^e = \vec{H}_0^e + \vec{H}^{pac},$$

где  $\vec{H}^{pac}$  представляет собой регулярное поле, а

$$\vec{H}_0^e = j \omega (\vec{p} \times \vec{\nabla} g),$$

$$g = \frac{\exp(j k_0 |\vec{x} - \vec{x}_0|)}{4 \pi |\vec{x} - \vec{x}_0|}.$$

Тогда

$$(\vec{E} \vec{H}_0^e \vec{n}) = - j \omega \vec{E} \left( \vec{p} \frac{\partial g}{\partial n} - (\vec{p} \cdot \vec{n}) \vec{\nabla} g \right)$$

и, если представить оператор  $\vec{\nabla}$  в виде



$$\vec{\nabla} = \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} + \vec{D},$$

где  $\vec{D}$  – тангенциальный дифференциальный оператор, то

$$\left( \vec{E} \vec{H}_0^e \vec{n} \right) = -j \omega \vec{E} \cdot \left( \vec{p}^T \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial n} - (\vec{p} \cdot \vec{n}) \vec{D} \mathbf{g} \right).$$

Отметим, что функция  $\partial \mathbf{g} / \partial n$  представляет собой ядро потенциала двойного слоя.

Если теперь воспользоваться тем, что на поверхности  $S$  в случае А  $H_n|_S = 0$ , а в случае В –  $E_n|_S = 0$  (это вытекает из уравнений Максвелла и граничных условий на поверхности  $S$ ), а также граничными свойствами потенциала двойного слоя и устремить точку  $x_0$  к поверхности  $S$ , то из (1.39), (1.40) могут быть получены интегральные уравнения:

$$-\frac{1}{2} j \omega \vec{q} \cdot \vec{H}^T(x_0) + j \omega \vec{q} \cdot \vec{H}^i(x_0) = \int_S \left( \vec{\epsilon}^m \vec{H}^T \vec{n} \right) dS, \quad (1.42)$$

$$\frac{1}{2} j \omega \vec{p} \cdot \vec{E}^T(x_0) - j \omega \vec{p} \cdot \vec{E}^i(x_0) = \int_S \left( \vec{E}^T \vec{\mathcal{H}}^e \vec{n} \right) dS. \quad (1.43)$$

Уравнения (1.42), (1.43) содержат лишь интегрирование по конечной поверхности  $S$  и поэтому представляют собой уравнения типа Фредгольма второго рода, которые допускают эффективное сведение к хорошо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений.

Решив интегральное уравнение (1.42), найдем  $\vec{H}^T(x_0)$ , и, подставив его в правую часть (1.38), (1.39), найдем поле  $\vec{E}^A(x_0)$ ,  $\vec{H}^A(x_0)$  для любого  $x_0 \in \Omega_1^+$  в случае, когда  $S$  представляет собой поверхность идеального проводника. Аналогично, с помо-

щью интегрального уравнения (1.43) и представлений (1.40), (1.41) определим поле  $\vec{E}^B(x_0)$ ,  $\vec{H}^B(x_0)$  для случая, когда  $S$  – поверхность идеального магнетика.

Воспользовавшись далее моделью Макдональда [17] идеально "черного" тела, можно получить поле, рассеянное рассматриваемым объектом (при наличии подстилающей поверхности) в предположении, что его поверхность  $S$  обладает свойствами идеально "черного" тела. Это поле

$$\vec{E}^C = \frac{1}{2}(\vec{E}^A + \vec{E}^B), \quad \vec{H}^C = \frac{1}{2}(\vec{H}^A + \vec{H}^B) \quad (1.44)$$

возникает в результате облучения первичной волной  $\vec{E}^i$ ,  $\vec{H}^i$  идеально поглощающего (в трактовке Макдональда) объекта при наличии подстилающей плоскости и неоднородностей среды.

### 1.3.3. Расчет поля, возбуждаемого излучающей апертурой в присутствии произвольной системы рассеивателей

Пусть апертура  $S_0$  расположена в плоскости  $S(x_3 = 0)$  и излучает в полупространство  $\Omega^+(x_3 > 0)$  поле  $\vec{E}(x)$ ,  $\vec{H}(x)$ , порождаемое сторонними источниками, которые расположены в полупространстве  $\Omega^-(x_3 < 0)$ . Область  $\Omega^+$  содержит:

а) идеально проводящие рассеиватели, совокупность граничных поверхностей которых обозначим как  $S_E$ , так что

$$\vec{E}^T \Big|_{S_E} = 0; \quad (1.45)$$

б) рассеиватели – идеальные магнетики, на граничной поверхности которых ( $S_H$ )

$$\vec{H}^T|_{S_H} = 0. \quad (1.46)$$

При этом часть  $\Omega_1^+$  полупространства  $\Omega^+$ , граница которой состоит из  $S$ ,  $S_E$ ,  $S_H$ , заполнена изотропной и, вообще говоря, неоднородной средой с комплексными проницаемостями  $\varepsilon(x)$ ,  $\mu(x)$ , которые могут иметь и поверхности разрыва непрерывности (границы раздела). В частности, речь может идти о наличии в  $\Omega^+$  радиопрозрачного антенного укрытия  $G^+$  той или иной конструкции (рис. 1.2).

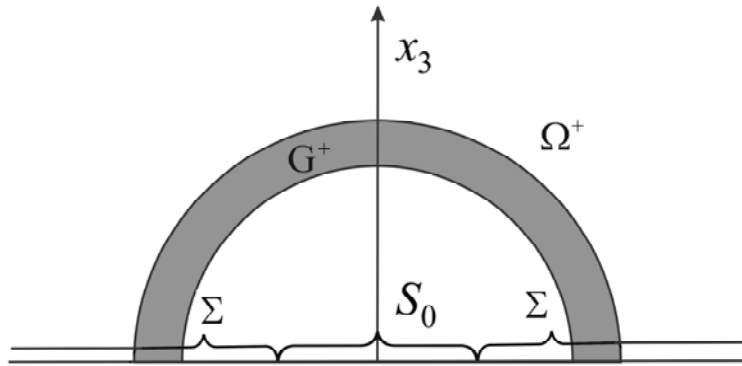


Рис. 1.2. Радиопрозрачное укрытие

Проблема состоит в выводе и физической интерпретации строгих и приближенных расчетных формул, выражающих поле излучения через распределения в апертуре тангенциальных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (или, что равносильно, через плотности эквивалентных поверхностных токов – магнитного и электрического) при следующих различных предположениях о физических свойствах поверхности  $\Sigma = S \setminus S_0$  (символ  $S \setminus S_0$  означает дополнение области  $S_0$  до полной плоскости  $S$ ):

А)  $\Sigma$  – поверхность идеального проводника,  $\vec{E}^T|_{\Sigma} = 0$ ;

В)  $\Sigma$  – поверхность идеального магнетика,  $\vec{H}^T|_{\Sigma} = 0$ ;

при этом в задачах А и В сторонние источники одни и те же, одинаковы и все граничные условия, кроме приведенных выше условий на поверхности  $\Sigma$ , граничащей с областью  $\Omega^+$ .

Введем обозначения  $(\vec{E}^A, \vec{H}^A)$  и  $(\vec{E}^B, \vec{H}^B)$  для полей, возбуждаемых в области  $\Omega_1^+$  данными сторонними источниками, соответственно в задачах А и В. Наряду с этими полями рассматриваются и их полусуммы

$$\vec{E}^C = \frac{1}{2}(\vec{E}^A + \vec{E}^B), \quad \vec{H}^C = \frac{1}{2}(\vec{H}^A + \vec{H}^B), \quad (1.47)$$

образующие некоторое "усреднение" полей, излучаемых апертурой  $S_0$  в ситуациях, когда  $\Sigma$  есть поверхность идеального проводника (вариант А) и идеального магнетика (вариант В). Усредненное поле (1.47) можно трактовать как поле, формально соответствующее модели Макдональда идеально черной поверхности  $\Sigma$ .

Применим лемму Лоренца к интересующему нас полю  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  (в вариантах А или В) и к полю  $\vec{\mathcal{E}}(x|x_0, \vec{p})$ ,  $\vec{\mathcal{H}}(x|x_0, \vec{p})$ , возбуждаемому в области  $\Omega_1^+$  электрическим диполем момента  $\vec{p}$ , расположенным в точке  $x \in \Omega_1^+$ , если вся плоскость  $S(x_3 = 0)$  является одной из материальных граничных поверхностей области  $\Omega_1^+$ , причем

$$\vec{\mathcal{E}}^T|_S = 0 \quad (\text{в варианте А}), \quad (1.48)$$

$$\vec{\mathcal{H}}^T|_S = 0. \quad (\text{в варианте В}). \quad (1.49)$$

Так как сторонние токи, возбуждающие поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , распределены в  $\Omega^-$ , а плотность тока, возбуждающего поле  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$ ,

$$\vec{J}_0 = -j \omega \vec{p} \delta(x - x_0), \quad (1.50)$$

то

$$j \omega \vec{p} \cdot \vec{E}(x_0) = \int_S + \int_{S_E} + \int_{S_H} \left( (\vec{E} \times \vec{\mathcal{H}}) - (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{H}) \right) \cdot d\vec{S}. \quad (1.51)$$

В силу граничных условий вида (1.45), (1.46)

$$\vec{E}^T \Big|_{S_E} = \vec{\mathcal{E}}^T \Big|_{S_E} = 0, \quad \vec{H}^T \Big|_{S_H} = \vec{\mathcal{H}}^T \Big|_{S_H} = 0,$$

поэтому интегралы по  $S_E$ ,  $S_H$  и по  $\Sigma = S \setminus S_0$  в (1.51) равны нулю.

В вариантах А, В имеем соответственно

$$j \omega \vec{p} \cdot \vec{E}^A(x_0) = \int_{S_0} (\vec{E}^A \times \vec{\mathcal{H}}^A) \cdot d\vec{S}, \quad (1.52)$$

$$j \omega \vec{p} \cdot \vec{E}^B(x_0) = - \int_{S_0} (\vec{\mathcal{E}}^B \times \vec{H}^B) \cdot d\vec{S}. \quad (1.53)$$

Вычислив полусуммы левых и правых частей равенства (1.52), (1.53) и воспользовавшись обозначением (1.47), имеем

$$j \omega \vec{p} \cdot \vec{E}^C(x_0) = \frac{1}{2} \int_{S_0} \left( (\vec{E}^A \times \vec{\mathcal{H}}^A) - (\vec{\mathcal{E}}^B \times \vec{H}^B) \right) \cdot d\vec{S}, \quad (1.54)$$

Полученное равенство (1.54) строго выражает "усредненное" (в смысле (1.47)) поле излучения апертуры  $S_0$  в любой точке  $x \in \Omega_1^+$  через распределение в  $S_0$  тангенциальных составляющих векторов  $\vec{E}^A$ ,  $\vec{H}^B$  и полей точечного источника (электрического диполя)  $\vec{\mathcal{E}}^A$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^B$ , возбуждаемых в области  $\Omega_1^+$  с идеальной (в смысле (1.48) или (1.49)) граничной плоскостью  $S$ .

Дальнейшее рассмотрение имеет целью некоторое преобразование и интерпретацию формулы (1.54).

Прежде всего представим векторные поля  $\vec{\mathcal{E}}^B(x|x_0, \vec{p})$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^A(x|x_0, \vec{p})$ , входящие в (1.54), через поле  $\vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p})$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p})$ , введенное в п. 1.3.1. Пусть  $x, x_0 \in \Omega_1^+$ , тогда электромагнитное поле  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ , где

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p}) + \vec{\mathcal{E}}_0(x|x'_0, \vec{p}'), \quad (1.55)$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p}) + \vec{\mathcal{H}}_0(x|x'_0, \vec{p}'), \quad (1.56)$$

есть поле  $\vec{\mathcal{E}}^B(x|x_0, \vec{p})$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^B(x|x_0, \vec{p})$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно лишь проверить выполнение условия (1.49). В силу (1.56), (1.27)

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p}) - \vec{\mathcal{H}}_0(x'|x_0, \vec{p}'),$$

откуда при  $x \in S$  имеем

$$\vec{\mathcal{H}}^T \Big|_S = 0. \quad (1.57)$$

Таким образом, поле (1.55), (1.56) действительно представляет собой поле точечного источника задачи В. Поэтому с учетом (1.26)  $\vec{\mathcal{E}}^B = \vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p}) + \vec{\mathcal{E}}_0'(x'|x_0, \vec{p}')$ , откуда при  $x \in S$  получаем

$$\vec{\mathcal{E}}^{BT} \Big|_S = 2 \vec{\mathcal{E}}_0^T(x|x_0, \vec{p}) \Big|_{x \in S}. \quad (1.58)$$

Подобным же образом устанавливаем, что

$$\vec{\mathcal{H}}^A = \vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p}) - \vec{\mathcal{H}}_0(x|x'_0, \vec{p}') = \vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p}) + \vec{\mathcal{H}}_0'(x'|x_0, \vec{p}'),$$

вследствие чего

$$\vec{\mathcal{H}}^{AT} \Big|_S = 2 \vec{\mathcal{H}}_0^T(x|x_0, \vec{p}) \Big|_{x \in S}. \quad (1.59)$$

Объединив результаты (1.54), (1.58), (1.59), получаем, что для любой точки  $x_0 \in \Omega_1^+$  и любого вектор-момента  $\vec{p}$  имеет место строгое соотношение

$$j\omega \vec{p} \cdot \vec{E}^C(x_0) = \int_{S_0} \left( (\vec{E}^A(x) \times \vec{\mathcal{H}}_0(x|x_0, \vec{p})) - (\vec{H}^B(x) \times \vec{\mathcal{E}}_0(x|x_0, \vec{p})) \right) \cdot d\vec{S}, \quad (1.60)$$

где  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ,  $\vec{n}$  – орт нормали к  $S$ , направленный в  $\Omega^-$ .

Итак, усредненное поле, излучаемое апертурой  $S_0$  в полупространство  $\Omega^+$ , заполненное неоднородной средой и различными рассеивающими объектами (например, содержащее какой-либо обтекатель), выражается формулой (1.60) через распределение в апертуре тангенциальных составляющих векторных полей  $\vec{E}^A(x)$ ,  $\vec{H}^B(x)$ , возбуждаемых источниками, размещенными в  $\Omega^-$ , если  $\Sigma$  представляет собой соответственно поверхность идеального проводника или идеального магнетика. Входящее же сюда поле  $\vec{\mathcal{E}}^0$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^0$  есть электромагнитное поле, возбуждаемое в симметризованной области  $\Omega_1$  точечным источником (электрическим диполем) при отсутствии какого-либо материального экрана в плоскости  $x_3 = 0$ .

Если, например, в  $\Omega^+$  размещен лишь некоторый диэлектрический обтекатель  $G^+$  (рис. 1.2), то  $\vec{\mathcal{E}}_0$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0$  – поле точечного источника в пространстве, содержащем лишь замкнутую диэлектрическую оболочку (рис. 1.3) симметричную (по геометрии и физическим свойствам) относительно плоскости  $x_3 = 0$ .

Наконец, сделаем заключительный шаг: от строгой формулы (1.60) перейдем к приближенной, соответствующей приближе-

нию физической оптики, когда краевые эффекты в апертуре относительно малы, вследствие чего можно (как это обычно делают в теории и практике антенных расчетов) принять, что в  $S_0$

$$\vec{E}^A(x) \approx \vec{E}^B(x), \quad \vec{H}^A(x) \approx \vec{H}^B(x).$$

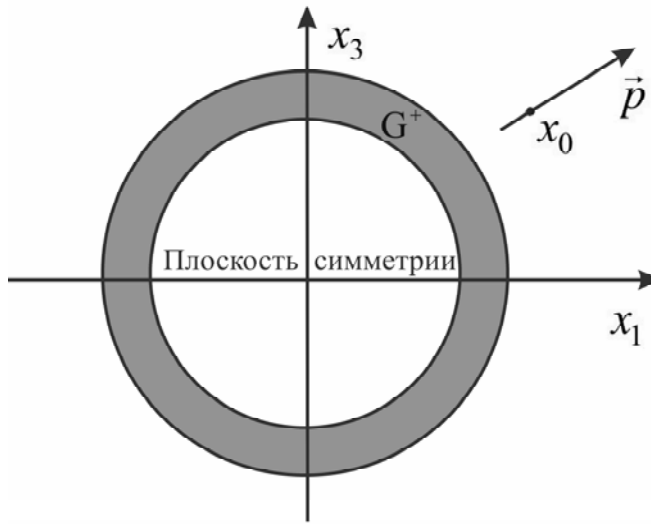


Рис. 1.3. Замкнутая диэлектрическая оболочка

Тогда, опустив индексы  $A, B$  (и сохранив в (1.54) знак обычного равенства, вместо приближенного), имеем

$$j \omega \vec{p} \cdot \vec{E}^C(x_0) = \int_{S_0} \left( (\vec{E}(x) \times \vec{\mathcal{H}}_0(x | x_0, \vec{p})) - (\vec{H}(x) \times \vec{\mathcal{E}}_0(x | x_0, \vec{p})) \right) \cdot d\vec{S}. \quad (1.61)$$

Интеграл в правой части (1.61) выражает поле излучающей апертуры методом эквивалентных токов через непосредственно задаваемые распределения  $\vec{E}^T, \vec{H}^T$  в апертуре. Отличие от обычно рассматриваемой задачи об излучении апертуры (апертурной



антенны) в свободное пространство состоит здесь в том, что  $\vec{\mathcal{E}}_0$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0$  в формуле (1.61) есть поле, дифрагированное на симметризованной системе рассеивателей (а не известное в явном виде поле электрического диполя в неограниченном свободном пространстве). Само же равенство (1.61) означает, что и в присутствии неоднородной среды и произвольной системы рассеивателей поле, рассчитанное методом эквивалентных токов (апертурным методом), совпадает – в пределах точности приближения физической оптики – с усредненным полем, формально соответствующим модели Макдональда; таким образом, результат Я.Н. Фельда [13] распространяется на рассматриваемый здесь более общий случай.

В случае, когда неоднородности среды и все рассеиватели в  $\Omega^+$  расположены на конечном расстоянии от  $S_0$ , из (1.60), (1.61) следуют формулы, выражающие комплексную диаграмму направленности рассматриваемой излучающей системы  $\vec{E}(\vec{R}^0)$ , где  $\vec{R}^0$  – орт, характеризующий направление на точку наблюдения в дальней (фраунгоферовой) зоне:

$$\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}^0) = \int_{S_0} \left( (\vec{E}^A(x) \times \vec{\mathcal{H}}_0(x, \vec{R}^0, \vec{p})) - (\vec{H}^B(x) \times \vec{\mathcal{E}}_0(x, \vec{R}^0, \vec{p})) \right) \cdot d\vec{S}, \quad (1.62)$$

(точная формула);

$$\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}^0) = \int_{S_0} \left( (\vec{E}^T(x) \times \vec{\mathcal{H}}_0(x, \vec{R}^0, \vec{p})) - (\vec{H}^T(x) \times \vec{\mathcal{E}}_0(x, \vec{R}^0, \vec{p})) \right) \cdot d\vec{S}, \quad (1.63)$$

(приближенная формула;  $\vec{E}^T$ ,  $\vec{H}^T$  – апертурные распределения тангенциальных компонент векторов поля в приближении Кирхгофа).

В формулах (1.62), (1.63)  $\vec{\mathcal{E}}_0(x, \vec{R}^0, \vec{p})$ ,  $\vec{\mathcal{H}}_0(x, \vec{R}^0, \vec{p})$  есть дифрагированное, прошедшее через симметризованную систему

рассеивателей поле, возбуждаемое падающей в направлении  $(-\vec{R}^0)$  плоской волной

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= (\vec{R}^0 \times (\vec{p} \times \vec{R}^0)) \exp(-j k_0 (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})), \\ \vec{H}_0 &= (\vec{p} \times \vec{R}^0) \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \exp(-j k_0 (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})),\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  – проницаемости свободного пространства,  $k_0$  – волновое число свободного пространства.

В заключение отметим, что формулы (1.38) – (1.44), (1.60) – (1.63) имеют не только расчетно-практическое, но и методическое значение: приведенный выше последовательный вывод и физические интерпретации позволяют оценивать пределы их применимости в различных конкретных классах расчетных задач. Несомненно, что использование формулы (1.63) при расчете диаграмм направленности антенных систем с обтекателями предпочтительнее, чем применение таких грубых расчетных схем как, например, известный метод вынесенных раскрывов ("метод фиктивных апертур" [18]).

#### **1.4. Регуляризация решений нестационарных задач рассеяния, получаемых в приближении физической оптики при разнесенном приеме**

При расчете методом физической оптики полей, рассеянных гладкими идеально проводящими телами, возникают ошибки, вызванные неадекватностью описания поверхностных токов вблизи терминатора (т.е. границы "свет-тень"). В работе [6] проведено исключение этих "терминаторных разрывов" для весьма частных случаев стационарного рассеяния (совмещенный прием, двумерные задачи либо трехмерные задачи, но в предположении, что терминатор является плоской кривой и притом его плоскость перпендикулярна направлению облучения). В [6] идентифицируются