

рассеивателей поле, возбуждаемое падающей в направлении $(-\vec{R}^0)$ плоской волной

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= (\vec{R}^0 \times (\vec{p} \times \vec{R}^0)) \exp(-j k_0 (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})), \\ \vec{H}_0 &= (\vec{p} \times \vec{R}^0) \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \exp(-j k_0 (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})),\end{aligned}$$

где ε_0 , μ_0 – проницаемости свободного пространства, k_0 – волновое число свободного пространства.

В заключение отметим, что формулы (1.38) – (1.44), (1.60) – (1.63) имеют не только расчетно-практическое, но и методическое значение: приведенный выше последовательный вывод и физические интерпретации позволяют оценивать пределы их применимости в различных конкретных классах расчетных задач. Несомненно, что использование формулы (1.63) при расчете диаграмм направленности антенных систем с обтекателями предпочтительнее, чем применение таких грубых расчетных схем как, например, известный метод вынесенных раскрывов ("метод фиктивных апертур" [18]).

1.4. Регуляризация решений нестационарных задач рассеяния, получаемых в приближении физической оптики при разнесенном приеме

При расчете методом физической оптики полей, рассеянных гладкими идеально проводящими телами, возникают ошибки, вызванные неадекватностью описания поверхностных токов вблизи терминатора (т.е. границы "свет-тень"). В работе [6] проведено исключение этих "терминаторных разрывов" для весьма частных случаев стационарного рассеяния (совмещенный прием, двумерные задачи либо трехмерные задачи, но в предположении, что терминатор является плоской кривой и притом его плоскость перпендикулярна направлению облучения). В [6] идентифицируются

члены, ответственные за возникновение этих реально не существующих разрывов, и в дальнейшем они вычитаются из физоптического интеграла, что заметно улучшает результат. При этом следует отметить, что методика исследований в [6] существенным образом опирается на вышеуказанные весьма ограничительные предположения и неприменима при нарушении каких-либо из них.

Между тем, нетрудно привести примеры гладких замкнутых выпуклых поверхностей с неплоским терминатором.

В качестве примера гладкой выпуклой поверхности с неплоским терминатором рассмотрим поверхность яйцевидной формы (рис. 1.4), задаваемую уравнением:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где

$$F = y^2 + z^2 - u(x),$$
$$u(x) = \frac{1}{4}(x+3)^2(1-x^2), \quad |x| \leq 1.$$

Пусть эта поверхность облучается плоской волной с волновым вектором $\vec{k} = (-1; 0; 1)$; тогда уравнениям терминатора

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \vec{k} \cdot \text{grad } F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

можно придать следующий вид:

$$(T): \begin{cases} y = \pm \sqrt{u(x) - v^2(x)}, \\ z = v(x), \end{cases}$$

где $v(x) = \frac{1}{4}(x+3)(2x^2 + 3x - 1)$.

Допустим, что линия (T) принадлежит какой-то плоскости

$$A y + B z + D x + C = 0, \\ (A^2 + B^2 + D^2 \neq 0).$$

Тогда имеем тождество:

$$A^2 (u - v^2) \equiv (C + B v + D)^2.$$

И так как

$$u(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \dots, \quad v(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \dots,$$

то из этого тождества следует: $\frac{1}{4}(A^2 + B^2)x^6 + \dots = 0$, откуда $A = B = 0$ и на терминаторе $x \equiv const$, что противоречит уравнениям терминатора (T).

Полученное противоречие позволяет сделать вывод о том, что линия терминатора (T) – неплоская.

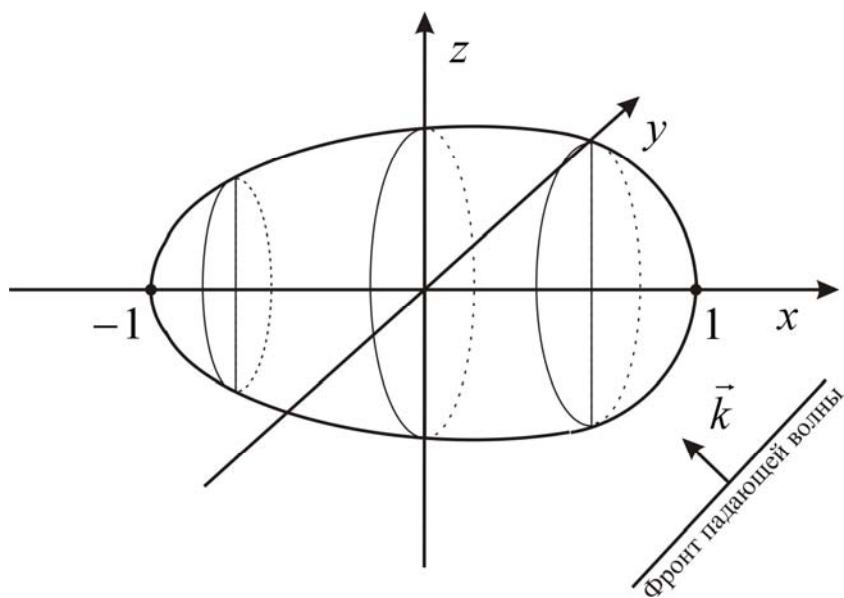


Рис. 1.4. Поверхность яйцевидной формы

Кроме того, даже в случае эллипсоида, при облучении которого в произвольном направлении \vec{R}^0 терминатор представляет собой плоскую кривую (эллипс), плоскость терминатора ортогональна к \vec{R}^0 лишь при \vec{R}^0 , параллельном одной из главных осей эллипсоида.

В разделе разрабатывается методика, позволяющая выделить члены, приносимые терминаторным разрывом физоптической плотности тока в асимптотике импульсной характеристики и ее Фурье-образа¹ при разнесенном приеме, произвольно ориентированном относительно направления облучения плоском терминаторе или же при неплоском терминаторе.

Для дальнейшего нам потребуется провести обобщение известной формулы М.И. Конторовича [19, 20], дающей вклад граничного контура в двумерном методе стационарной фазы, на случай неплоской области и невырожденной точки стационарной фазы любого типа (не только эллиптического).

При этом предполагаемый асимптотический метод дает также краевую асимптотику в практически важном случае амплитудной функции с сингулярностью на контуре.

1.4.1. Асимптотика поверхностных интегралов при произвольном типе невырожденной точки стационарной фазы и сингулярной на краевом контуре амплитудной функции

Интегральные представления высокочастотных электромагнитных полей содержат поверхностные интегралы вида

$$I = \iint_S \exp(jk\Phi(x_1, x_2, x_3)) F(x_1, x_2, x_3) dS \quad (1.64)$$

при $k \gg 1$.

¹ Речь идет о высокочастотной асимптотике Фурье-образа импульсной характеристики и о соответствующем асимптотическом представлении импульсной характеристики вблизи волнового фронта.

Если поверхность S незамкнута (например, при дифракции волн на ограниченном экране или излучении апертурной антенны), то асимптотика интеграла I состоит из вкладов, вносимых поверхностными (двумерными) точками стационарной фазы и краевым контуром L . Случай, когда поверхность S есть участок плоскости, а Φ и F – достаточно гладкие функции, исследован в [19, 20]. Примененный здесь метод, опирающийся на интегральные теоремы векторного анализа, позволил выделить вклад стационарной точки только эллиптического типа.

Ниже мы рассмотрим:

а) интеграл по неплоской (в общем случае) поверхности S при гладких фазовой Φ и амплитудной F функциях; получено (строго) асимптотическое представление интеграла (1.64) в виде суммы вкладов от L , а также от изолированной точки стационарной фазы любого типа [21];

б) вклад краевого контура L плоской области S в случае, когда (как это имеет место в практически важных классах задач теории дифракции и теории излучающих систем) амплитудная функция

$$F = \frac{F_0(x_1, x_2)}{d^p(x_1, x_2)}, \quad 0 < p < 1. \quad (1.65)$$

Здесь функция F_0 непрерывна в $S \cup L$, а $d(x_1, x_2)$ – расстояние от точки $M(x_1, x_2) \in S$ до контура L . Отметим, что метод, применяемый в [20], в такой ситуации непригоден;

в) посредством операционного перехода к оригиналам в полученных коротковолновых асимптотиках выведены асимптотические формулы для некоторых нестационарных полей, действующие вблизи волновых фронтов.

Асимптотика интеграла (1.64) при отсутствии поверхностных точек стационарной фазы и краевых сингулярностей. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ – уравнение поверхности S с достаточно

гладким краевым контуром L . Функции f , Φ , F будем считать достаточно гладкими на поверхности S и вблизи нее. Введем орт нормали

$$\vec{n} = \vec{n}(x) = \vec{n}(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla}f / |\vec{\nabla}f| \quad (1.66)$$

и тангенциальные дифференциальные операторы $\vec{D} = \nabla - \vec{n} \frac{\partial}{\partial n}$,

$$\vec{D}^\perp = \vec{n} \times \vec{D}.$$

Предположение об отсутствии точек стационарной фазы на поверхности означает, что $|\vec{D}\Phi| = |\vec{D}^\perp\Phi| \neq 0$ везде на $S \cup L$.

Введем вектор-функцию

$$\vec{u} = \frac{\vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}^\perp\Phi|^2} = \frac{\vec{D}\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2}. \quad (1.67)$$

Тогда $\vec{n} \cdot \text{rot}(\exp(jk\Phi)F\vec{u}) = jk\exp(jk\Phi)F(\vec{D}^\perp\Phi\vec{u}) + \exp(jk\Phi)\vec{D}^\perp(F\vec{u})$,
а, с учетом (1.67),

$$jk\exp(jk\Phi)F = \vec{n} \cdot \text{rot} \left(\exp(jk\Phi)F \frac{\vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} \right) - \exp(jk\Phi)\vec{D}^\perp \left(F \frac{\vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} \right). \quad (1.68)$$

Отсюда, в силу интегральной теоремы Стокса,

$$jk \iint_S \exp(jk\Phi)F dS = \oint_L \exp(jk\Phi)F \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} dS - \iint_S \exp(jk\Phi)\vec{D}^\perp \left(F \frac{\vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} \right) dS, \quad (1.69)$$

где $\vec{\tau}$ – орт касательной к L (направление обхода краевого контура L согласовано с ортом нормали к поверхности S , определенным по (1.66)). Заметим (для дальнейшего), что

$$\vec{\tau} \cdot \vec{D}^\perp \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu},$$

где $\vec{\nu} = (\vec{\tau} \times \vec{n})$ – орт нормали к L , лежащий в плоскости, касательной к S . Соотношению (1.69), таким образом, можно придать следующий вид:

$$I_0 = \frac{1}{jk} K_0 - \frac{1}{jk} I_1. \quad (1.70)$$

Здесь

$$I_0 = \iint_S \exp(jk\Phi) F dS; \quad I_1 = \iint_S \exp(jk\Phi) \Gamma F dS;$$

$$K_0 = \oint_L \exp(jk\Phi) F \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right) / |\vec{D}\Phi|^2 \right] dS,$$

а $TF = \vec{D}^\perp \left(F \frac{\vec{D}^\perp \Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} \right)$ есть некоторый оператор, действующий на

функцию F .

Применив многократно преобразование (1.70), получим при любом заданном m , что

$$I_0 = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{(jk)^{s+1}} K_s + \frac{(-1)^m}{(jk)^m} I_m, \quad (1.71)$$

где K_s, I_m – результаты замены в K_0, I_0 функции F соответственно на $T^s F, T^m F$. Из (1.71) следует асимптотическая формула для поверхностного интеграла (1.70) при сделанных выше

предположениях:

$$\iint_S \exp(jk\Phi) F dS = \oint_L \exp(jk\Phi) \left[\left(\frac{d\Phi}{dv} \right) / |\bar{D}\Phi|^2 \right] F_m ds + o\left(\frac{1}{k^m}\right), \quad (1.72)$$

где

$$F_m = F_m(x_1, x_2, x_3, k) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{(ik)^{s+1}} T^s F. \quad (1.73)$$

Пусть, например, эти точки S_1, S_2, \dots, S_N и пусть $\Phi''(S_i) \neq 0$, ($i=1, \dots, N$) (это условие можно заменить и более общим предположением). Тогда интеграл в правой части (1.72) может быть представлен в виде

$$\sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{k|\Phi''(S_i)|}} \cdot F_m(S_i) \left(\frac{\partial\Phi/\partial v}{|\bar{D}\Phi|^2} \right)_{S=S_i} \cdot \exp\left(jk\Phi(S_i) + \frac{j\pi}{4} \operatorname{sgn}\Phi''(S_i)\right).$$

Контурный интеграл в (1.72) при необходимости может быть заменен суммой вкладов от заведомо существующих контурных точек стационарной фазы. Если на каком-то простом замкнутом контуре, входящем в крайовой контур L , имеем $0 \leq S \leq S_{max}$, то $\Phi|_{s=S_{max}} = \Phi|_{s=0}$, а поэтому в промежутке $0 \leq S \leq S_{max}$ есть точки, в которых $d\Phi/ds = 0$.

Метод "нейтрализаторов", локализация асимптотических вкладов. Будем считать поверхность S и ее крайовой контур L бесконечно гладкими, а функции f, F, Φ бесконечно дифференцируемыми на и вблизи поверхности S , причем везде на $S \cup L$ $\nabla f \neq 0$, а $\bar{D}\Phi = 0$ в одной лишь точке

$M_0(x_0) = M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, расположенной на поверхности S на расстоянии $R > 0$ от краевого контура L .

После перехода к декартовой системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с началом в точке $M_0(x_0)$ и осью $M_0\xi_3$, имеющей направление орта нормали $\vec{n}(x_0)$, получим:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), & F(x_1, x_2, x_3) &= \hat{F}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \Phi(x_1, x_2, x_3) &= \hat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned}$$

Поверхность S согласно [22] (при $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \xi_i^2} < R_0$, где R_0 достаточно малое, и $R_0 < R$) описывается уравнением вида $\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2)$. В точке M_0 имеем $g = 0$, $g_{\xi_1} = g_{\xi_2} = 0$. Введем функцию $\gamma(\rho)$ – "нейтрализатор", бесконечно гладкую на полуоси $0 \leq \rho < +\infty$, причём

$$\gamma(\rho) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho \leq \varepsilon_0 \\ 0, & \rho \geq \varepsilon_1 \end{cases},$$

где $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < R_0$.

Произведем "разбиение единицы" $1 = \gamma(\rho) + [1 - \gamma(\rho)]$ в интеграле I

$$I = \iint_S \exp(jk\Phi) F_1 dS = J_1 + J_0. \quad (1.74)$$

Здесь $J_1 = \iint_{S_1} \exp(jk\Phi) F_1 dS$, $S_1 = S \cap \{|\vec{x} - \vec{x}_0| \leq \varepsilon_1\}$, $F_1 = F\gamma$,

$J_0 = \iint_{S_0} \exp(jk\Phi) F_0 dS$, $S_0 = S \cap \{|\vec{x} - \vec{x}_0| \geq \varepsilon_0\}$, $F_0 = F(1 - \gamma)$.

Краевой контур поверхности S_0 состоит из линии L и линии пересечения L_0 сферы $|\vec{x} - \vec{x}_0| = \varepsilon_0$ с S . Функция F_0 и все ее производные равны нулю на линии L_0 , а на линии L совпадают с соответствующими значениями функции F и ее производных. К тому же на $S_0 \cup L \cup L_0$ нет поверхностных точек стационарной фазы, поэтому, в силу результатов, полученных ранее,

$$J_0 = \oint_L \exp(jk\Phi) \left[\left(\frac{d\Phi}{dv} \right) / |\vec{D}\Phi|^2 \right] F_m ds + o\left(\frac{1}{k^m}\right), \quad (1.75)$$

где F_m представлено формулой (1.73).

Переходим к асимптотике интеграла J_1 . Так как $\varepsilon_1 < R_0$, то поверхность S_1 имеет уравнение $\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2)$, а ее краевой контур L_1 есть пересечение поверхности S со сферой $|\vec{x} - \vec{x}_0| = \varepsilon_1$. Обозначим через L'_1 , S'_1 соответственно проекции контура и поверхности на координатную плоскость (ξ_1, ξ_2) . Тогда

$$J_1 = \iint_{S'_1} \exp(jk\bar{\Phi}) \bar{F}_1 dS'_1, \quad (1.76)$$

где $\bar{\Phi}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))$,
 $\bar{F}_1(\xi_1, \xi_2) = \gamma(\bar{\rho}) \hat{F}(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2)) \sqrt{1 + g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2}$, $\bar{\rho} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + g^2(\xi_1, \xi_2)}$.

Множитель $\gamma(\bar{\rho})$ на контуре L'_1 обращает функцию \bar{F}_1 и все ее частные производные сколь угодно высокого порядка в нуль при $\bar{\rho} = \varepsilon_1$. При этих условиях и в предположении невырожденности точки стационарной фазы M_0 двойной интеграл в (1.76) допускает [23, 24] асимптотическое разложение вида

$$J_1 \sim k^{-1} \exp[jk\Phi(M_0)] \sum_{m=0}^{+\infty} a_m k^{-m}. \quad (1.77)$$

В главном асимптотическом приближении интеграл

$$J_1 = \frac{2\pi}{k} \exp(jk\Phi(M_0)) \left[\frac{\exp((j\pi/4) \operatorname{sgn} \bar{\Phi})}{\sqrt{|\det \bar{\Phi}|}} F(M_0) + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], \quad (1.78)$$

где $\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{\xi_1^2} & \bar{\Phi}_{\xi_1 \xi_2} \\ \bar{\Phi}_{\xi_1 \xi_2} & \bar{\Phi}_{\xi_2^2} \end{bmatrix}$, а $\operatorname{sgn} \bar{\Phi} = \mu^+ - \mu^-$ – разность между коли-

чествами положительных и отрицательных собственных значений λ_1, λ_2 матрицы $\bar{\Phi}$. В эллиптическом случае ($\lambda_1 \lambda_2 > 0$) $\operatorname{sgn} \bar{\Phi} = \pm 2$, в гиперболическом ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$) – $\operatorname{sgn} \bar{\Phi} = 0$.

Элементы матрицы $\bar{\Phi}$ допускают (это можно установить) следующее выражение через производные функции $\hat{\Phi}, \hat{f}$ по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3 в точке $M_0(0,0,0)$ при всех $l, m = 1, 2$

$$\left(\bar{\Phi}_{\xi_l \xi_m} \right)_{\xi_1 = \xi_2 = 0} = \hat{f}_{\xi_3}^{-1} \left[\hat{\Phi}_{\xi_l \xi_m} \hat{f}_{\xi_3} - \hat{f}_{\xi_l \xi_m} \hat{\Phi}_{\xi_3} \right]_{M_0}. \quad (1.79)$$

Таким образом, для представления интеграла J_1 по (1.78) нет необходимости решать относительно ξ_3 уравнение $\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ и находить явное выражение функции $g(\xi_1, \xi_2)$.

Итак, асимптотика интеграла I локализована во вкладах, вносимых краем L поверхности S (1.76) и точкой стационарной фазы M_0 (1.78), (1.79). Этот результат распространяется на случай нескольких поверхностных точек стационарной фазы. Кроме того, примененный выше метод "нейтрализаторов" позволяет, опираясь на результаты, приведенные в [23–25], получать и асимптотические вклады изолированных точек стационарной фазы в различных случаях вырождения. Например, если после надлежащего

поворота системы координат $\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ вокруг оси $M_0 \xi_3$ фазовая функция имеет (вблизи точки M_0) разложение

$$\bar{\Phi}(\xi_1, \xi_2) = \Phi(M_0) + \lambda_1 \xi_1^2 + \sum_{\substack{p+q \geq 3 \\ p, q \geq 0}} \lambda_{pq} \xi_1^p \xi_2^q,$$

и если $\lambda_1 \neq 0, \lambda_{03} \neq 0$, то [25]

$$J_1 \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \exp(jk\Phi(M_0)) F(M_0) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/3) \exp(j\pi/4) \operatorname{sgn} \lambda_1}{\sqrt{|\lambda_1|} \sqrt[3]{|\lambda_{03}|} k^{5/6}}. \quad (1.80)$$

Если рассматривать интеграл I как спектральное изображение, то его оригиналом будет служить интеграл

$$\bar{I} = \iint_S \delta(t - \Phi(\bar{x})) F(\bar{x}) dS.$$

Применяя обратное преобразование Фурье к правой части соотношения (1.74) (с учетом (1.75), (1.77)), получим лучевое разложение для \bar{I} тем более точное, чем величина $|t - \Phi(\bar{x})|$ ближе к нулю. Главный член этого разложения имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{I} = \iint_S \delta(t - \Phi(\bar{x})) F(\bar{x}) dS \sim & -j2\pi \exp\left(j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \bar{\Phi}\right) \frac{F(M_0)}{\sqrt{|\det \bar{\Phi}|}} \chi(t - \Phi(\bar{x})) - \\ & - \int_L \chi(t - \Phi(\bar{x})) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) / |\bar{D}\Phi|^2 \right] F(\bar{x}) dS. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Здесь M_0 – точка стационарной фазы (точка, в которой $\bar{D}\Phi = 0$) на поверхности S ; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\chi(t)$ – единичная функция Хевисайда. Таким образом, формулу (1.81) можно рассматривать как нестационарный аналог полученного в разделе обобщения формулы М. И. Конторовича [20].

Асимптотика интегралов с краевой особенностью. К интегралам с краевой особенностью приводит решение ряда задач электродинамики. Например, таких:

1. Пусть отыскивается полное дифрагированное поле $\vec{H}(\vec{x})$ от первичной волны $\vec{H}_0(\vec{x})$, падающей на плоский идеально проводящий бесконечно тонкий экран S , ограниченный контуром L . В таком случае из формулы Грина [26] следует интегральное представление вектора магнитной напряженности поля в любой точке \vec{x}_0 , не расположенной на экране:

$$\vec{H}(\vec{x}_0) = \vec{H}_0(\vec{x}_0) + \iint_S (\vec{\nabla} g \times \vec{J}(\vec{x})) dS. \quad (1.82)$$

Здесь $\vec{J}(\vec{x})$ – плотность поверхностного тока, $g = g(\vec{x}_0, \vec{x}) = \exp(jkr)/(4\pi r)$, $r = |\vec{x}_0 - \vec{x}|$, а рассеянное поле имеет вид

$$\vec{H}(\vec{x}_0) - \vec{H}_0(\vec{x}_0) = \iint_S \exp(jk\Phi) \vec{F}(\vec{x}_0, \vec{x}) dS, \quad (1.83)$$

при фазовой функции $\Phi = \Phi(\vec{x}_0, \vec{x}) = r$.

2. К интегралам вида (1.83) с той же фазовой функцией приводит излучение апертурной антенны в математически строгой модели [15, 16].

В каждом из приведенных примеров действует физически необходимое условие на ребре, обеспечивающее конечность энергии в окрестности излома поверхности [26]. Вследствие этого у амплитудной функции F допустима на бесконечно тонком краю сингулярность, т.е. $F = F_0/\sqrt{d}$, где F_0 непрерывна в окрестности

¹ Не ограничивая общности, везде далее будем под F понимать какую-либо компоненту вектора \vec{F} . Под k будем понимать безразмерный параметр, равный произведению волнового числа k_0 на характерный размер экрана.

краевого контура, а $d=d(x_1, x_2)$ – расстояние точки области S от краевого контура.

В более общем случае изломов с внутренними углами $\theta \in [0, \pi]$ – $F=F_0/d^p$, $p=(\pi-\theta)/2\pi \in [0, 1/2]$.

Метод получения коротковолновых асимптотик при наличии краевых сингулярностей излагается ниже применительно к интегралу P по плоской строго выпуклой области S с достаточно гладкими краевым контуром L и функцией F_0 :

$$P = \iint_S \exp(jkr) \frac{F_0(\vec{x})}{\sqrt{d(\vec{x})}} dS, \quad (1.84)$$

где $r = \sqrt{(x_1^0 - x_1)^2 + (x_2^0 - x_2)^2 + h^2}$, ($h = x_3^0 \neq 0$).

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, 0) \in S$ находится от краевого контура L на расстоянии $R_1 > 0$. Тогда комплексная диаграмма направленности

$$Q = \iint_S \exp(-jk(\vec{R}^0 \cdot \vec{x})) \frac{F_0(\vec{x})}{\sqrt{d(\vec{x})}} dS, \quad (1.85)$$

где $\vec{R}^0 = (0, -\cos\psi, \sin\psi)$.

Исследовать интеграл P удобно, задав краевой контур L уравнением в полярных координатах (ρ, θ) с полюсом в точке M_0 :

$$\rho = \omega(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1.86)$$

В этом случае (можно обосновать) амплитудная функция в интеграле P представима отношением вида $F_1(\rho, \theta) / \sqrt{\omega(\theta) - \rho}$ с числителем, не имеющим особенностей. Получим

$$P = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\omega(\theta)} \exp(jk\sqrt{\rho^2 + h^2}) \frac{F_1(\rho, \theta) \rho d\rho}{\sqrt{\omega(\theta) - \rho}}. \quad (1.87)$$

Преобразуем интеграл P к новой переменной интегрирования $r = \sqrt{\rho^2 + h^2}$:

$$P = \int_0^{2\pi} d\theta \int_h^{\Omega} \exp(jkr) (\Omega - r)^{-1/2} G r dr, \quad (1.88)$$

где $\Omega = \Omega(\theta) = \sqrt{\omega^2(\theta) + h^2}$,

$$G = G(r, \theta) = F_1 \left(\sqrt{r^2 - h^2}, \theta \right) \left[\frac{\omega(\theta) + \sqrt{r^2 - h^2}}{\Omega(\theta) + r} \right]^{1/2}.$$

Введем при $h \leq r \leq \Omega(\theta)$ бесконечно дифференцируемые по r (при каждом θ) нейтрализаторы $\gamma_0(r, \theta)$, $\gamma_1(r, \theta)$, такие, что $\gamma_1 = 1 - \gamma_0$, $\gamma_0(r, \theta) = \begin{cases} 1, & h \leq r \leq \varepsilon_1 \\ 0, & \varepsilon_0 \leq r \leq \Omega(\theta) \end{cases}$ ($h < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \Omega(\theta)$). При условии $1 = \gamma_0(r, \theta) + \gamma_1(r, \theta)$ получим $P = P_0 + P_1$.

Рассмотрим асимптотику интеграла P . Вклад точки стационарной фазы $\rho = 0$ ($r = h$) таков:

$$P_0 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_h^{\varepsilon_0} \exp(jkr) (\Omega - r)^{-1/2} G \gamma_0 r dr. \quad (1.89)$$

Так как функция $G_0(r, \theta) = (\Omega - r)^{-1/2} G \gamma_0 r$ при каждом θ непрерывна по $r \in [h, \varepsilon_0]$ вместе со своими производными (они равны нулю при $r = \varepsilon_0$), то интегрирование по частям приводит к соотношению

$$P_0 = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m \exp(jkh)}{(jk)^m} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{m-1} G_0(h, \theta)}{\partial r^{m-1}} d\theta + O\left(\frac{1}{k^{N+1}}\right). \quad (1.90)$$

В главном приближении

$$P_0 = -\frac{h \exp(jkh)}{jk} F_1(M_0) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\omega(\theta)}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (1.91)$$

При асимптотическом разложении интеграла

$$P_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varepsilon_1}^{\Omega} \exp(jkr) (\Omega - r)^{-1/2} G\gamma_1 r dr \quad (1.92)$$

к цели приводит интегрирование по частям во внутреннем интеграле. Однако, вследствие сингулярности функции $(\Omega - r)^{-1/2}$ в точке $r = \Omega$, дифференцировать ее под знаком интеграла недопустимо и, вместо e^{jkr}/jk , $e^{jkr}/(jk)^2$, ... нужно применить последовательность первообразных специального вида от произведения $e^{jkr} (\Omega - r)^{-1/2} = U_0(r, \theta)$, т.е. применить последовательность функций

$$U_m(r, \theta) = \frac{(-1)^{m+j\infty}}{(m-1)!} \int_r^{\Omega} (t-r)^{m-1} \exp(jkt) (\Omega - t)^{-1/2} dt, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (1.93)$$

обладающих следующими свойствами:

1. $\frac{\partial U_m(r, \theta)}{\partial r} = U_{m-1}(r, \theta), \quad (m = 1, 2, \dots),$
2. $U_m(\Omega, \Omega) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \exp(\pi j(m+1/2)/2) \frac{\Gamma(m-1/2)}{k^{m-1/2}} \exp(jk\Omega),$
3. $|U_m(r, \Omega)| \leq \frac{1}{(m-1)!} \frac{\Gamma(m-1/2)}{k^{m-1/2}}, \quad (h \leq r \leq \Omega).$

Из этих свойств вытекает асимптотическое разложение

$$P_1 = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^{m-1} \exp(-j\pi(m-1/2)/2) \Gamma(m-1/2)}{k^{m-1/2}} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \exp(jk\Omega) \Psi_{m-1}(\theta) d\theta + O\left(\frac{1}{k^{N+1/2}}\right), \quad (1.94)$$

где $\Psi_{m-1}(\theta) = \frac{\partial^{m-1}[G(r,\theta)r]}{\partial r^{m-1}} \Big|_{r=\Omega(\theta)}$.

В главном приближении

$$P_1 = \frac{\exp(-j\pi/4) \sqrt{\pi}^{2\pi}}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \exp(jk\Omega) F_1(\omega, \theta) \sqrt{\omega\Omega} d\theta + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Теперь рассмотрим асимптотическое представление интеграла Q (1.85). Ограничимся случаем краевого контура L , симметричного относительно одной из осей координат, и получим лишь первые два члена асимптотического разложения.

Пусть в системе координат (x, y) L задается уравнениями $x = \pm w(y)$ ($a \leq y \leq b$) и вблизи точек a, b $w(y)$ имеет асимптотики

$$w(y) \sim \begin{cases} p(y)\sqrt{y-a}, & (y \rightarrow a+0) \\ q(y)\sqrt{b-y}, & (y \rightarrow b-0) \end{cases}.$$

При этом $p(y), q(y), w^2(y)$ – достаточно гладкие функции соответственно в $[a, a+\varepsilon), (b-\varepsilon, b], [a, b]$ (при $\varepsilon < (b-a)/2$).

Амплитудную функцию в (1.85) можно представить как отношение вида $f(x, y) / \sqrt{w^2(y) - x^2}$, в котором $f(x, y)$ не имеет сингулярностей. Предположим, что эта функция достаточно гладкая в $S \cup L$. После несложных преобразований получим

$$Q = \int_a^b \exp(j\bar{k}y) U(y) dy, \quad (\bar{k} = k \cos \psi), \quad (1.95)$$

$$U(y) = \int_{-1}^1 f(\xi w(y), y) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (1.96)$$

$$U'(y) = \int_{-1}^1 \frac{\partial f(\xi w(y), y)}{\partial y} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{1}{2} \frac{dw^2(y)}{dy} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f(\theta \xi w(y), y)}{\partial x^2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (0 < \theta < 1). \quad (1.97)$$

Из (1.96), (1.97) следует, что

$$U(a) = f(0, a)\pi, \quad U(b) = f(0, b)\pi,$$

$$U'(a) = \left(\frac{\partial f(0, a)}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(0, a)}{\partial x^2} A \right) \pi, \quad (1.98)$$

$$U'(b) = \left(\frac{\partial f(0, b)}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(0, b)}{\partial x^2} B \right) \pi,$$

где $A = \lim_{y \rightarrow a+0} \left[\frac{w(y)}{\sqrt{y-a}} \right]^2$, $B = \lim_{y \rightarrow b-0} \left[\frac{w(y)}{\sqrt{b-y}} \right]^2$.

Двукратное интегрирование по частям в (1.95) приводит к следующей асимптотической формуле

$$Q = \pi \exp(j\bar{k}b) \left[\frac{1}{j\bar{k}} f(0, b) - \frac{1}{(j\bar{k})^2} \left(\frac{\partial f(0, b)}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(0, b)}{\partial x^2} B \right) \right] - \pi \exp(j\bar{k}a) \left[\frac{1}{i\bar{k}} f(0, a) - \frac{1}{(j\bar{k})^2} \left(\frac{\partial f(0, a)}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(0, a)}{\partial x^2} A \right) \right] + O\left(\frac{1}{\bar{k}^3}\right). \quad (1.99)$$

Таким образом, полученное асимптотическое представление интеграла Q имеет дискретный характер и состоит из вкладов от окрестностей точек $(0, a)$, $(0, b)$ краевого контура. Такое явление хорошо известно в теории коротковолновой дифракции и связано с концепцией "блестящих точек" в радиолокации.

Методы, близкие к примененным выше для вычисления интегралов P , Q , позволяют получить асимптотические представления интегралов с другими фазовыми функциями и другими типами краевых сингулярностей.

Применим полученное обобщение формулы Конторовича (1.81) к решению задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем гладком выпуклом теле (в приближении физической оптики).

1.4.2. Импульсная характеристика идеально проводящего гладкого выпуклого тела в двухпозиционном случае (метод физической оптики). Исключение терминаторных разрывов

Воспользовавшись асимптотическим соотношением (1.99), можно получить представление импульсной характеристики идеально проводящего гладкого выпуклого тела в общем случае бистатической локации.

Пусть на объект с поверхностью S падает плоская монохроматическая электромагнитная волна

$$\begin{aligned} \vec{E}^0 &= \vec{p} \exp(j k_0 (a + \vec{R}^0 \cdot \vec{x})), \\ \vec{H}^0 &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\vec{R}^0 \times \vec{p}) \exp(j k_0 (a + \vec{R}^0 \cdot \vec{x})). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Здесь a – расстояние от плоскости нулевой фазы до выбранного начала координат, \vec{p} – орт поляризации, \vec{R}^0 – волновой орт падающей волны.