Таким образом, полученное асимптотическое представление интеграла Q имеет дискретный характер и состоит из вкладов от окрестностей точек $(0,a)$, $(0,b)$ краевого контура. Такое явление хорошо известно в теории коротковолновой дифракции и связано с концепцией "блестящих точек" в радиолокации.

Методы, близкие к примененным выше для вычисления интегралов P, Q, позволяют получить асимптотические представления интегралов с другими фазовыми функциями и другими типами краевых сингулярностей.

Применим полученное обобщение формулы Конторовича (1.81) к решению задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем гладком выпуклом теле (в приближении физической оптики).

1.4.2. Импульсная характеристика идеально проводящего гладкого выпуклого тела в двухпозиционном случае (метод физической оптики). Исключение терминаторных разрывов

Воспользовавшись асимптотическим соотношением (1.99), можно получить представление импульсной характеристики идеально проводящего гладкого выпуклого тела в общем случае бистатической локации.

Пусть на объект с поверхностью S падает плоская монохроматическая электромагнитная волна

$$\vec{E}^0 = \vec{p}\, exp\left(j\, k_0 \left(a + \vec{R}^0 \cdot \vec{x}\right)\right),$$

$$\vec{H}^0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\vec{R}^0 \times \vec{p}\right) exp\left(j\, k_0 \left(a + \vec{R}^0 \cdot \vec{x}\right)\right). \qquad (1.100)$$

Здесь a – расстояние от плоскости нулевой фазы до выбранного начала координат, $\vec{p}$ – орт поляризации, $\vec{R}^0$ – волновой орт падающей волны.

Операционным оригиналом поля (1.100) является импульсная плоская волна

$$\vec{\mathscr{E}}^0\left(t,\vec{x}\middle|\vec{R}^0\right)=\vec{p}\,\delta\left(t-a-\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right),$$

$$\vec{\mathscr{H}}^0\left(t,\vec{x}\middle|\vec{R}^0\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)\delta\left(t-a-\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right). \qquad (1.101)$$

Поле, рассеянное телом в направлении орта $\vec{r}^{\,0}$ при облучении волной (1.100), может быть представлено в виде:

$$\vec{H}^{\,pac}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\approx\frac{exp\left(\,j\,k_0\,r\,\right)}{4\pi r}\,j\,k_0\iint\limits_{S}\left(\vec{H}^{\perp}\times\vec{r}^{\,0}\right)exp\left(-\,j\,k_0\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\right)dS\,,$$

где $\vec{H}$ – полное поле на поверхности S. Приближение физической оптики дает следующее выражение для рассеянного поля:

$$\vec{H}^{\,pac}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\approx j\,k_0\iint\limits_{S_{осв}}exp\left(\,j\,k_0\,\Phi\,\right)\vec{A}\,dS\,, \qquad (1.102)$$

где $S_{осв}$ – часть поверхности объекта, "освещенная" волной (1.100),

$$\vec{A}=\frac{1}{2\pi r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec{n}\times\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)\right)\times\vec{r}^{\,0}\,,\quad \Phi=a+r+\left(\vec{R}^0-\vec{r}^{\,0}\right)\cdot\vec{x}\,.$$

Импульсная же характеристика объекта является оригиналом, спектральное изображение которого в высокочастотном приближении представляется выражением (1.102):

$$\vec{\mathscr{H}}^{pac}\left(t,\vec{x}\,\middle|\,\vec{r}^{\,0}\right)\approx-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{осв}}\delta\left(t-\Phi\left(\vec{x}\right)\right)\vec{A}\,dS\,. \qquad (1.103)$$

Таким образом, выражение для импульсной характеристики может быть получено с помощью формулы (1.99) простым дифференцированием по t.

Попутно получим представление для оценки решения стационарной задачи дифракции, описываемого выражением (1.102).

Оценим вначале вклад точки стационарной фазы. Точка стационарной фазы M_0 определяется равенством: в точке M_0

$$\vec{D}\Phi = \left(\vec{R}^0 - \vec{r}^{\,0}\right)^T = \vec{R}^{0^T} - \vec{r}^{\,0^T} = 0$$

или

$$\vec{R}^0 \cdot \vec{n} = -\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – нормаль к $S_{осв}$ в точке стационарной фазы M_0.

Введем в окрестности точки M_0 локальную систему координат ξ_1, ξ_2, ζ, описанную в п. 1.4.1 (здесь $\zeta = \xi_3$). Вблизи точки M_0 на $S_{осв}$

$$\zeta = -\left(\frac{a_{11}}{2}\xi_1^2 + a_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + \frac{a_{22}}{2}\xi_2^2\right) + o\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right),$$

то есть с точностью до членов высшего порядка малости

$$\zeta = -\frac{1}{2}\vec{\xi}'\,A\,\vec{\xi}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В этом случае вблизи M_0

$$\overline{\Phi}\left(\xi_1, \xi_2\right) = a + r + l_1^0\,\xi_1 + l_2^0\,\xi_2 - \frac{1}{2}\left(\vec{l}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right)\left(\vec{\xi}'\,A\,\vec{\xi}\right),$$

где $\vec{l}^{\,0} = \vec{R}^0 - \vec{r}^{\,0}$, так что

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \xi_i \, \partial \xi_k}\right)_{M_0} = -\frac{1}{2}\left(\vec{l}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right) a_{ik} \,,$$

$$\overline{\Phi}_{M_0} = -\frac{1}{2}\left(\vec{l}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right) A \,.$$

Учитывая, что

$$\left(\vec{l}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right) = 2\left(\vec{R}^{0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right) = -2\left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right),$$

получим

$$\overline{\Phi}_{M_0} = \left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right) A \,.$$

Так как $\vec{n}_{M_0}$ – орт внешней нормали к $S_{осв}$, то очевидно, что $\left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right) > 0$.

Пусть λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы A. Тогда

$$sgn\, \overline{\Phi}_{M_0} = sgn\, A \,,$$

$$\left|\, det\, \overline{\Phi}_{M_0} \right| = \left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right)^2 \left|\, det\, A \right| = \left(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n}_{M_0}\right)^2 \left| \lambda_1 \lambda_2 \right| .$$

Далее, при надлежащем повороте системы координат вокруг оси ζ получаем уравнение $S_{осв}$ вблизи M_0

$$\zeta = -\frac{1}{2}\left(\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2\right) + \ldots \,,$$

откуда следует, что λ_1, λ_2 – главные кривизны $S_{осв}$ в точке M_0:

$$\lambda_1 = æ_1 \,, \;\; \lambda_2 = æ_2 \,;$$

$$\left| det\,\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} \right| = cos^2\left(\vec{r}^{\,0},\, \vec{n}_{M_0}\right) \cdot \left| æ_1\, æ_2 \right| .$$

Для дальнейшего необходимо предположить, что $æ_1\, æ_2 \neq 0$. В частности, если S вблизи точки M_0 является строго выпуклой, то $æ_1 > 0$, $æ_2 > 0$ и

$$\left| det\,\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} \right| = æ_1\, æ_2\, cos^2\left(\vec{r}^{\,0}, \vec{n}_{M_0}\right),$$

$$sgn\,\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} = 2\,.$$

Если же M_0 – седловая точка, то $æ_1 æ_2 < 0$, $sgn\,\overline{\mathbf{\Phi}}_{M_0} = 0$. Ради определенности, дальнейшее рассмотрение проводится для случая $æ_1 > 0$, $æ_2 > 0$. Воспользовавшись формулой (1.78), получим вклад точки стационарной фазы в рассеянное поле:

$$\vec{H}^{\,рас}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\Big|_{\,ст.ф.} \sim -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\left[\vec{n}_{M_0} \times \left(\vec{R}^{\,0} \times \vec{p}\right)\right] \times \vec{r}^{\,0}}{r\sqrt{æ_1\, æ_2}\,\left|cos\left(\vec{r}^{\,0}, \vec{n}_{M_0}\right)\right|}\,\cdot$$
$$\cdot exp\left(j\,k\left(a + r + \vec{l}^{\,0} \cdot \vec{x}_{M_0}\right)\right). \tag{1.104}$$

Границей поверхности $S_{осв}$ является терминатор L – линия, определяющая границу "свет-тень". Оценим ее вклад в асимптотику рассеянного поля, воспользовавшись формулой (1.75):

$$\left(\vec{H}^{\,рас}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.\,Г} \sim \int\limits_L e^{j\,k\,\Phi}\,\vec{A}\,\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu}}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2}\,d\,l\,. \tag{1.105}$$

Здесь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{l}^{\,0} \cdot \vec{\nu} = \vec{l}^{\,0} \cdot \left(\vec{\tau} \times \vec{n}\right),$$

$$\left|\vec{D}\Phi\right|^2=\left|\vec{l}^{\,0T}\right|^2=\left|\vec{l}^{\,0}\right|^2-\left(\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{n}\right)^2.$$

Допустим, что контур L задан параметрически:

$$\vec{x}=\vec{x}(t).$$

Тогда контурные точки стационарной фазы определяются из уравнения

$$\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}'(t)=0$$

и пусть это точки – $M_i\left(i=1,\ldots,N\right)$. Тогда интеграл в (1.105) может быть вычислен асимптотически:

$$\left(\vec{H}^{pac}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.L}\sim\sum_{m=1}^{N}\sqrt{\frac{2}{k\left|\vec{l}^{\,0}\cdot\left(\dfrac{d\vec{\tau}}{dS}\right)_{M_m}\right|}}\cdot\left(\vec{A}\right)_{M_m}\frac{\left(\vec{l}^{\,0}\,\vec{\tau}\,\vec{n}\right)_{M_m}}{\left|\vec{l}^{\,0}\right|^2-\left(\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{n}_{M_m}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot exp\left(jk\left(a+r+\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_m}\right)+\frac{j\pi}{4}sgn\left(\vec{l}^{\,0}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dS}\right)_{M_m}\right). \qquad (1.106)$$

Здесь учтено, что

$$\left(\Phi''(l)\right)_{M_m}=\vec{l}^{\,0}\cdot\left(\frac{d\vec{\tau}}{dS}\right)_{M_m},$$

где

$$\vec{\tau}(t)=\frac{\vec{x}'(t)}{\left|\vec{x}'(t)\right|},\quad \frac{d\vec{\tau}}{dS}=\vec{\tau}'(t)\frac{dt}{dS}=\frac{\vec{\tau}'(t)}{\left|\vec{x}'(t)\right|}.$$

Таким образом, объединив формулы (1.104) и (1.105), получим

$$\vec{H}^{рас}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right) \sim -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\left[\vec{n}_{M_0}\times\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)\right]\times\vec{r}^{\,0}}{r\cdot\sqrt{|æ_1\,æ_2|}\,\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{n}_{M_0}\right)}\times$$

$$\times exp\left(j\,k\left(a+r+\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_0}\right)\right)+\int\limits_L e^{j\,k\,\Phi}\,\vec{A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right)d\,l\,. \qquad (1.107)$$

Формула (1.107) дает решение стационарной задачи дифракции при облучении идеально проводящего гладкого выпуклого тела плоской волной (1.100).

Выражение же импульсной характеристики рассматриваемого объекта (рассеянного поля, получаемого в результате нестационарного импульсного облучения объекта полем (1.101)) может рассматриваться как оригинал, спектральное изображение которого дается формулой (1.107):

$$\vec{\mathscr{H}}^{рас}\left(t,\vec{x}\,\middle|\,\vec{r}^{\,0}\right) \sim -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\left[\vec{n}_{M_0}\times\left(\vec{R}^0\times\vec{p}\right)\right]\times\vec{r}^{\,0}}{r\cdot\sqrt{|æ_1\,æ_2|}\,\left(\vec{r}^{\,0}\cdot\vec{n}_{M_0}\right)}\,\delta\left(t-a-r-\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_0}\right)+$$

$$+\int\limits_L \delta\left(t-a-r-\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}\right)\vec{A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right)d\,l. \qquad (1.108)$$

Таким образом, в полученном физоптическом приближении импульсной характеристики нами выделены члены, ответственные за появление "терминаторных" разрывов, вызванных неадекватным описанием плотности поверхностного тока вблизи границы "свет-тень" в приближении физической оптики. Полученное решение стационарной задачи дифракции, по аналогии с [6], можно улучшить вычитая из полученного физоптического решения главные члены "терминаторной" асимптотики, описываемые соотношением (1.106).

Сглаживание импульсной характеристики (1.108) может быть проведено путем вычитания из правой части (1.108) операционного оригинала, соответствующего изображению $\left(\vec{H}^{рас}\left(r\,\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.L}$:

$$\mathscr{H}^{рас}\left(t,\vec{x}\,\middle|\,\vec{r}^{\,0}\right)\Big|_{Вкл.L} \sim \sum_{m=1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\left|\vec{l}^{\,0}\cdot\left(\dfrac{d\,\vec{\tau}}{d\,S}\right)_{M_m}\right|}}\times$$
$$\times\left(\vec{A}\right)_{M_m}\frac{\left(\vec{l}^{\,0}\,\vec{\tau}\,\vec{n}\right)_{M_m}}{\left|\vec{l}^{\,0}\right|^2-\left(\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{n}_{M_m}\right)^2}\cdot exp\left(j\frac{\pi}{4}\left(sgn\left(\vec{l}^{\,0}\cdot\frac{d\,\vec{\tau}}{d\,S}\right)_{M_m}-1\right)\right)\times$$
$$\times\frac{\chi\left(t-a-r-\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_m}\right)}{\sqrt{t-a-r-\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}_{M_m}}}. \qquad (1.109)$$

Полученное при этом представление импульсной характеристики уже не будет содержать "паразитных", реально не существующих всплесков, привносимых разрывным характером плотности поверхностного тока в приближении физической оптики.

Отметим также особый случай, когда терминатор L принадлежит плоскости с нормальным вектором $\vec{l}^{\,0}$. В этом случае

$$\Phi\left(\vec{x}\right)\Big|_L = const$$

и, следовательно,

$$\vec{l}^{\,0}\cdot\vec{x}=c \text{ на } L,$$

где c – некоторая константа.

Отсюда следует, что

$$\left(\vec{H}^{рас}\left(r\;\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.L} \sim exp\left(j\,k\left(a+r+c\right)\right)\int\limits_L \vec{A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^2\right)d\,l,$$

$$\left(\vec{\mathscr{H}}^{\,pac}\left(t,\vec{x}\,\middle|\,\vec{r}^{\,0}\right)\right)_{Вкл.L} \sim \delta\left(t-a-r-c\right)\int\limits_{L}\vec{A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big/\left|\vec{D}\Phi\right|^{2}\right)dS\,.$$

В этом случае, как легко видеть, образуется сильный "паразитный" терминаторный всплеск импульсной характеристики, который необходимо исключить.

В ряде случаев для оценки импульсных характеристик сложных рассеивателей в двухпозиционной локации более предпочтительным может оказаться другой подход (разработанный авторами) также использующий приближение физической оптики, но минующий оценку вкладов точек стационарной фазы [27–29].

Таким образом, в разделе дана методика получения импульсной характеристики идеально проводящего гладкого объекта в двухпозиционном случае.

При этом в полученном асимптотическом представлении выделены члены, ответственные за возникновение "паразитных" всплесков, которые выражаются контурным интегралом. Получены главные члены асимптотики этих интегралов, которые необходимо исключить из представления импульсной характеристики для сглаживания последней. Это позволит повысить точность расчетов на интервале времени до момента прихода "ползущей" волны, огибающей область тени.

Эти результаты опираются на полученное обобщение формулы М.И. Конторовича, дающей вклад граничного контура в двумерном методе стационарной фазы, на случай неплоской области и невырожденных точек стационарной фазы любого типа.

1.5. О принципе взаимности для рассеянных полей в приближении физической оптики

Как известно, для полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, и, вообще говоря, каким-либо граничным условиям на поверхности рассеивающих объектов, справедлив принцип взаим-