

рассеивателей поле, возбуждаемое падающей в направлении $(-\vec{R}^0)$ плоской волной

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= (\vec{R}^0 \times (\vec{p} \times \vec{R}^0)) \exp(-j k_0 (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})), \\ \vec{H}_0 &= (\vec{p} \times \vec{R}^0) \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \exp(-j k_0 (\vec{R}^0 \cdot \vec{x})),\end{aligned}$$

где ε_0 , μ_0 – проницаемости свободного пространства, k_0 – волновое число свободного пространства.

В заключение отметим, что формулы (1.38) – (1.44), (1.60) – (1.63) имеют не только расчетно-практическое, но и методическое значение: приведенный выше последовательный вывод и физические интерпретации позволяют оценивать пределы их применимости в различных конкретных классах расчетных задач. Несомненно, что использование формулы (1.63) при расчете диаграмм направленности антенных систем с обтекателями предпочтительнее, чем применение таких грубых расчетных схем как, например, известный метод вынесенных раскрывов ("метод фиктивных апертур" [18]).

1.4. Регуляризация решений нестационарных задач рассеяния, получаемых в приближении физической оптики при разнесенном приеме

При расчете методом физической оптики полей, рассеянных гладкими идеально проводящими телами, возникают ошибки, вызванные неадекватностью описания поверхностных токов вблизи терминатора (т.е. границы "свет-тень"). В работе [6] проведено исключение этих "терминаторных разрывов" для весьма частных случаев стационарного рассеяния (совмещенный прием, двумерные задачи либо трехмерные задачи, но в предположении, что терминатор является плоской кривой и притом его плоскость перпендикулярна направлению облучения). В [6] идентифицируются

члены, ответственные за возникновение этих реально не существующих разрывов, и в дальнейшем они вычитаются из физоптического интеграла, что заметно улучшает результат. При этом следует отметить, что методика исследований в [6] существенным образом опирается на вышеуказанные весьма ограничительные предположения и неприменима при нарушении каких-либо из них.

Между тем, нетрудно привести примеры гладких замкнутых выпуклых поверхностей с неплоским терминатором.

В качестве примера гладкой выпуклой поверхности с неплоским терминатором рассмотрим поверхность яйцевидной формы (рис. 1.4), задаваемую уравнением:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где

$$F = y^2 + z^2 - u(x),$$
$$u(x) = \frac{1}{4}(x+3)^2(1-x^2), \quad |x| \leq 1.$$

Пусть эта поверхность облучается плоской волной с волновым вектором $\vec{k} = (-1; 0; 1)$; тогда уравнениям терминатора

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \vec{k} \cdot \text{grad } F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

можно придать следующий вид:

$$(T): \begin{cases} y = \pm \sqrt{u(x) - v^2(x)}, \\ z = v(x), \end{cases}$$

где $v(x) = \frac{1}{4}(x+3)(2x^2 + 3x - 1)$.

Допустим, что линия (T) принадлежит какой-то плоскости

$$A y + B z + D x + C = 0, \\ (A^2 + B^2 + D^2 \neq 0).$$

Тогда имеем тождество:

$$A^2 (u - v^2) \equiv (C + B v + D)^2.$$

И так как

$$u(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \dots, \quad v(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \dots,$$

то из этого тождества следует: $\frac{1}{4}(A^2 + B^2)x^6 + \dots = 0$, откуда $A = B = 0$ и на терминаторе $x \equiv const$, что противоречит уравнениям терминатора (T).

Полученное противоречие позволяет сделать вывод о том, что линия терминатора (T) – неплоская.

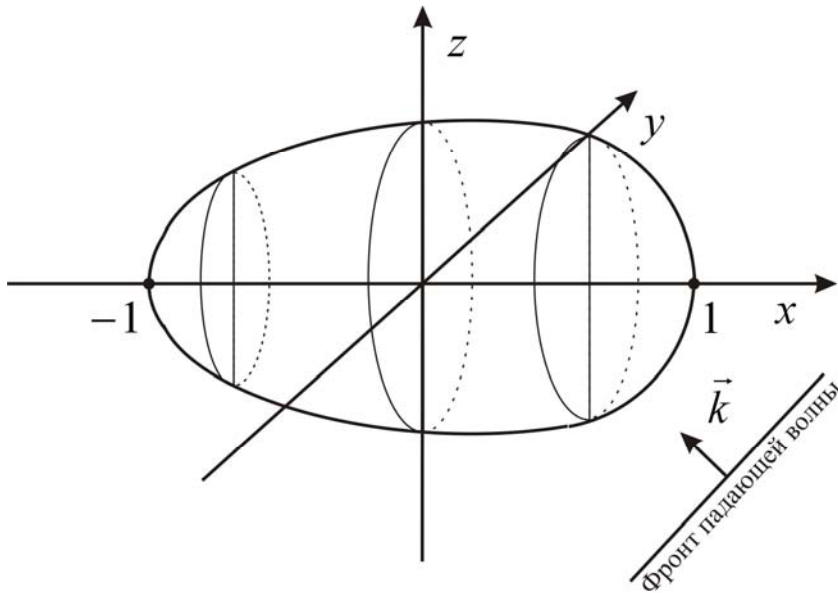


Рис. 1.4. Поверхность яйцевидной формы

Кроме того, даже в случае эллипсоида, при облучении которого в произвольном направлении \vec{R}^0 терминатор представляет собой плоскую кривую (эллипс), плоскость терминатора ортогональна к \vec{R}^0 лишь при \vec{R}^0 , параллельном одной из главных осей эллипсоида.

В разделе разрабатывается методика, позволяющая выделить члены, приносимые терминаторным разрывом физоптической плотности тока в асимптотике импульсной характеристики и ее Фурье-образа¹ при разнесенном приеме, произвольно ориентированном относительно направления облучения плоском терминаторе или же при неплоском терминаторе.

Для дальнейшего нам потребуется провести обобщение известной формулы М.И. Конторовича [19, 20], дающей вклад граничного контура в двумерном методе стационарной фазы, на случай неплоской области и невырожденной точки стационарной фазы любого типа (не только эллиптического).

При этом предполагаемый асимптотический метод дает также краевую асимптотику в практически важном случае амплитудной функции с сингулярностью на контуре.

1.4.1. Асимптотика поверхностных интегралов при произвольном типе невырожденной точки стационарной фазы и сингулярной на краевом контуре амплитудной функции

Интегральные представления высокочастотных электромагнитных полей содержат поверхностные интегралы вида

$$I = \iint_S \exp(jk\Phi(x_1, x_2, x_3)) F(x_1, x_2, x_3) dS \quad (1.64)$$

при $k \gg 1$.

¹ Речь идет о высокочастотной асимптотике Фурье-образа импульсной характеристики и о соответствующем асимптотическом представлении импульсной характеристики вблизи волнового фронта.

Если поверхность S незамкнута (например, при дифракции волн на ограниченном экране или излучении апертурной антенны), то асимптотика интеграла I состоит из вкладов, вносимых поверхностными (двумерными) точками стационарной фазы и краевым контуром L . Случай, когда поверхность S есть участок плоскости, а Φ и F – достаточно гладкие функции, исследован в [19, 20]. Примененный здесь метод, опирающийся на интегральные теоремы векторного анализа, позволил выделить вклад стационарной точки только эллиптического типа.

Ниже мы рассмотрим:

а) интеграл по неплюской (в общем случае) поверхности S при гладких фазовой Φ и амплитудной F функциях; получено (строго) асимптотическое представление интеграла (1.64) в виде суммы вкладов от L , а также от изолированной точки стационарной фазы любого типа [21];

б) вклад краевого контура L плоской области S в случае, когда (как это имеет место в практически важных классах задач теории дифракции и теории излучающих систем) амплитудная функция

$$F = \frac{F_0(x_1, x_2)}{d^p(x_1, x_2)}, \quad 0 < p < 1. \quad (1.65)$$

Здесь функция F_0 непрерывна в $S \cup L$, а $d(x_1, x_2)$ – расстояние от точки $M(x_1, x_2) \in S$ до контура L . Отметим, что метод, применяемый в [20], в такой ситуации непригоден;

в) посредством операционного перехода к оригиналам в полученных коротковолновых асимптотиках выведены асимптотические формулы для некоторых нестационарных полей, действующие вблизи волновых фронтов.

Асимптотика интеграла (1.64) при отсутствии поверхностных точек стационарной фазы и краевых сингулярностей. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ – уравнение поверхности S с достаточно

гладким краевым контуром L . Функции f , Φ , F будем считать достаточно гладкими на поверхности S и вблизи нее. Введем орт нормали

$$\vec{n} = \vec{n}(x) = \vec{n}(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla}f / |\vec{\nabla}f| \quad (1.66)$$

и тангенциальные дифференциальные операторы $\vec{D} = \nabla - \vec{n} \frac{\partial}{\partial n}$,

$$\vec{D}^\perp = \vec{n} \times \vec{D}.$$

Предположение об отсутствии точек стационарной фазы на поверхности означает, что $|\vec{D}\Phi| = |\vec{D}^\perp\Phi| \neq 0$ везде на $S \cup L$.

Введем вектор-функцию

$$\vec{u} = \frac{\vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}^\perp\Phi|^2} = \frac{\vec{D}\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2}. \quad (1.67)$$

Тогда $\vec{n} \cdot \text{rot}(\exp(jk\Phi)F\vec{u}) = jk\exp(jk\Phi)F(\vec{D}^\perp\Phi\vec{u}) + \exp(jk\Phi)\vec{D}^\perp(F\vec{u})$, а, с учетом (1.67),

$$jk\exp(jk\Phi)F = \vec{n} \cdot \text{rot} \left(\exp(jk\Phi)F \frac{\vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} \right) - \exp(jk\Phi)\vec{D}^\perp \left(F \frac{\vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} \right). \quad (1.68)$$

Отсюда, в силу интегральной теоремы Стокса,

$$jk \iint_S \exp(jk\Phi)F dS = \oint_L \exp(jk\Phi)F \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} dS - \iint_S \exp(jk\Phi)\vec{D}^\perp \left(F \frac{\vec{D}^\perp\Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} \right) dS, \quad (1.69)$$

где $\vec{\tau}$ – орт касательной к L (направление обхода краевого контура L согласовано с ортом нормали к поверхности S , определенным по (1.66)). Заметим (для дальнейшего), что

$$\vec{\tau} \cdot \vec{D}^\perp \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu},$$

где $\vec{\nu} = (\vec{\tau} \times \vec{n})$ – орт нормали к L , лежащий в плоскости, касательной к S . Соотношению (1.69), таким образом, можно придать следующий вид:

$$I_0 = \frac{1}{jk} K_0 - \frac{1}{jk} I_1. \quad (1.70)$$

Здесь

$$I_0 = \iint_S \exp(jk\Phi) F dS; \quad I_1 = \iint_S \exp(jk\Phi) \Gamma F dS;$$

$$K_0 = \oint_L \exp(jk\Phi) F \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right) / |\vec{D}\Phi|^2 \right] dS,$$

а $TF = \vec{D}^\perp \left(F \frac{\vec{D}^\perp \Phi}{|\vec{D}\Phi|^2} \right)$ есть некоторый оператор, действующий на функцию F .

Применив многократно преобразование (1.70), получим при любом заданном m , что

$$I_0 = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{(jk)^{s+1}} K_s + \frac{(-1)^m}{(jk)^m} I_m, \quad (1.71)$$

где K_s, I_m – результаты замены в K_0, I_0 функции F соответственно на $T^s F, T^m F$. Из (1.71) следует асимптотическая формула для поверхностного интеграла (1.70) при сделанных выше

предположениях:

$$\iint_S \exp(jk\Phi) F dS = \oint_L \exp(jk\Phi) \left[\left(\frac{d\Phi}{dv} \right) / |\bar{D}\Phi|^2 \right] F_m ds + o\left(\frac{1}{k^m}\right), \quad (1.72)$$

где

$$F_m = F_m(x_1, x_2, x_3, k) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{(ik)^{s+1}} T^s F. \quad (1.73)$$

Пусть, например, эти точки S_1, S_2, \dots, S_N и пусть $\Phi''(S_i) \neq 0$, ($i=1, \dots, N$) (это условие можно заменить и более общим предположением). Тогда интеграл в правой части (1.72) может быть представлен в виде

$$\sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{k|\Phi''(S_i)|}} \cdot F_m(S_i) \left(\frac{\partial\Phi/\partial v}{|\bar{D}\Phi|^2} \right)_{S=S_i} \cdot \exp\left(jk\Phi(S_i) + \frac{j\pi}{4} \operatorname{sgn} \Phi''(S_i) \right).$$

Контурный интеграл в (1.72) при необходимости может быть заменен суммой вкладов от заведомо существующих контурных точек стационарной фазы. Если на каком-то простом замкнутом контуре, входящем в крайовой контур L , имеем $0 \leq S \leq S_{max}$, то $\Phi|_{s=S_{max}} = \Phi|_{s=0}$, а поэтому в промежутке $0 \leq S \leq S_{max}$ есть точки, в которых $d\Phi/ds = 0$.

Метод "нейтрализаторов", локализация асимптотических вкладов. Будем считать поверхность S и ее крайовой контур L бесконечно гладкими, а функции f, F, Φ бесконечно дифференцируемыми на и вблизи поверхности S , причем везде на $S \cup L$ $\nabla f \neq 0$, а $\bar{D}\Phi = 0$ в одной лишь точке

$M_0(x_0) = M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, расположенной на поверхности S на расстоянии $R > 0$ от краевого контура L .

После перехода к декартовой системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) с началом в точке $M_0(x_0)$ и осью $M_0\xi_3$, имеющей направление орта нормали $\vec{n}(x_0)$, получим:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), & F(x_1, x_2, x_3) &= \hat{F}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ \Phi(x_1, x_2, x_3) &= \hat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned}$$

Поверхность S согласно [22] (при $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \xi_i^2} < R_0$, где R_0 достаточно малое, и $R_0 < R$) описывается уравнением вида $\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2)$. В точке M_0 имеем $g = 0$, $g_{\xi_1} = g_{\xi_2} = 0$. Введем функцию $\gamma(\rho)$ – "нейтрализатор", бесконечно гладкую на полуоси $0 \leq \rho < +\infty$, причем

$$\gamma(\rho) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho \leq \varepsilon_0 \\ 0, & \rho \geq \varepsilon_1 \end{cases},$$

где $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < R_0$.

Произведем "разбиение единицы" $1 = \gamma(\rho) + [1 - \gamma(\rho)]$ в интеграле I

$$I = \iint_S \exp(jk\Phi) F_1 dS = J_1 + J_0. \quad (1.74)$$

Здесь $J_1 = \iint_{S_1} \exp(jk\Phi) F_1 dS$, $S_1 = S \cap \{|\vec{x} - \vec{x}_0| \leq \varepsilon_1\}$, $F_1 = F\gamma$,

$J_0 = \iint_{S_0} \exp(jk\Phi) F_0 dS$, $S_0 = S \cap \{|\vec{x} - \vec{x}_0| \geq \varepsilon_0\}$, $F_0 = F(1 - \gamma)$.

Краевой контур поверхности S_0 состоит из линии L и линии пересечения L_0 сферы $|\vec{x} - \vec{x}_0| = \varepsilon_0$ с S . Функция F_0 и все ее производные равны нулю на линии L_0 , а на линии L совпадают с соответствующими значениями функции F и ее производных. К тому же на $S_0 \cup L \cup L_0$ нет поверхностных точек стационарной фазы, поэтому, в силу результатов, полученных ранее,

$$J_0 = \oint_L \exp(jk\Phi) \left[\left(\frac{d\Phi}{dv} \right) / |\vec{D}\Phi|^2 \right] F_m ds + o\left(\frac{1}{k^m}\right), \quad (1.75)$$

где F_m представлено формулой (1.73).

Переходим к асимптотике интеграла J_1 . Так как $\varepsilon_1 < R_0$, то поверхность S_1 имеет уравнение $\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2)$, а ее краевой контур L_1 есть пересечение поверхности S со сферой $|\vec{x} - \vec{x}_0| = \varepsilon_1$. Обозначим через L'_1 , S'_1 соответственно проекции контура и поверхности на координатную плоскость (ξ_1, ξ_2) . Тогда

$$J_1 = \iint_{S'_1} \exp(jk\bar{\Phi}) \bar{F}_1 dS'_1, \quad (1.76)$$

где $\bar{\Phi}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))$,

$\bar{F}_1(\xi_1, \xi_2) = \gamma(\bar{\rho}) \hat{F}(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2)) \sqrt{1 + g_{\xi_1}^2 + g_{\xi_2}^2}$, $\bar{\rho} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + g^2(\xi_1, \xi_2)}$.

Множитель $\gamma(\bar{\rho})$ на контуре L'_1 обращает функцию \bar{F}_1 и все ее частные производные сколь угодно высокого порядка в нуль при $\bar{\rho} = \varepsilon_1$. При этих условиях и в предположении невырожденности точки стационарной фазы M_0 двойной интеграл в (1.76) допускает [23, 24] асимптотическое разложение вида

$$J_1 \sim k^{-1} \exp[jk\Phi(M_0)] \sum_{m=0}^{+\infty} a_m k^{-m}. \quad (1.77)$$

В главном асимптотическом приближении интеграл

$$J_1 = \frac{2\pi}{k} \exp(jk\Phi(M_0)) \left[\frac{\exp((j\pi/4) \operatorname{sgn} \bar{\Phi})}{\sqrt{|\det \bar{\Phi}|}} F(M_0) + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], \quad (1.78)$$

где $\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{\xi_1^2} & \bar{\Phi}_{\xi_1 \xi_2} \\ \bar{\Phi}_{\xi_1 \xi_2} & \bar{\Phi}_{\xi_2^2} \end{bmatrix}$, а $\operatorname{sgn} \bar{\Phi} = \mu^+ - \mu^-$ – разность между коли-

чествами положительных и отрицательных собственных значений λ_1, λ_2 матрицы $\bar{\Phi}$. В эллиптическом случае ($\lambda_1 \lambda_2 > 0$) $\operatorname{sgn} \bar{\Phi} = \pm 2$, в гиперболическом ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$) – $\operatorname{sgn} \bar{\Phi} = 0$.

Элементы матрицы $\bar{\Phi}$ допускают (это можно установить) следующее выражение через производные функции $\hat{\Phi}, \hat{f}$ по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3 в точке $M_0(0,0,0)$ при всех $l, m = 1, 2$

$$\left(\bar{\Phi}_{\xi_l \xi_m} \right)_{\xi_1 = \xi_2 = 0} = \hat{f}_{\xi_3}^{-1} \left[\hat{\Phi}_{\xi_l \xi_m} \hat{f}_{\xi_3} - \hat{f}_{\xi_l \xi_m} \hat{\Phi}_{\xi_3} \right]_{M_0}. \quad (1.79)$$

Таким образом, для представления интеграла J_1 по (1.78) нет необходимости решать относительно ξ_3 уравнение $\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ и находить явное выражение функции $g(\xi_1, \xi_2)$.

Итак, асимптотика интеграла I локализована во вкладах, вносимых краем L поверхности S (1.76) и точкой стационарной фазы M_0 (1.78), (1.79). Этот результат распространяется на случай нескольких поверхностных точек стационарной фазы. Кроме того, примененный выше метод "нейтрализаторов" позволяет, опираясь на результаты, приведенные в [23–25], получать и асимптотические вклады изолированных точек стационарной фазы в различных случаях вырождения. Например, если после надлежащего

поворота системы координат $\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ вокруг оси $M_0 \xi_3$ фазовая функция имеет (вблизи точки M_0) разложение

$$\bar{\Phi}(\xi_1, \xi_2) = \Phi(M_0) + \lambda_1 \xi_1^2 + \sum_{\substack{p+q \geq 3 \\ p, q \geq 0}} \lambda_{pq} \xi_1^p \xi_2^q,$$

и если $\lambda_1 \neq 0, \lambda_{03} \neq 0$, то [25]

$$J_1 \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \exp(jk\Phi(M_0)) F(M_0) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/3) \exp(j\pi/4) \operatorname{sgn} \lambda_1}{\sqrt{|\lambda_1|} \sqrt[3]{|\lambda_{03}|} k^{5/6}}. \quad (1.80)$$

Если рассматривать интеграл I как спектральное изображение, то его оригиналом будет служить интеграл

$$\bar{I} = \iint_S \delta(t - \Phi(\bar{x})) F(\bar{x}) dS.$$

Применяя обратное преобразование Фурье к правой части соотношения (1.74) (с учетом (1.75), (1.77)), получим лучевое разложение для \bar{I} тем более точное, чем величина $|t - \Phi(\bar{x})|$ ближе к нулю. Главный член этого разложения имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{I} = \iint_S \delta(t - \Phi(\bar{x})) F(\bar{x}) dS \sim & -j2\pi \exp\left(j\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \bar{\Phi}\right) \frac{F(M_0)}{\sqrt{|\det \bar{\Phi}|}} \chi(t - \Phi(\bar{x})) - \\ & - \int_L \chi(t - \Phi(\bar{x})) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) / |\bar{D}\Phi|^2 \right] F(\bar{x}) dS. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Здесь M_0 – точка стационарной фазы (точка, в которой $\bar{D}\Phi = 0$) на поверхности S ; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\chi(t)$ – единичная функция Хевисайда. Таким образом, формулу (1.81) можно рассматривать как нестационарный аналог полученного в разделе обобщения формулы М. И. Конторовича [20].

Асимптотика интегралов с краевой особенностью. К интегралам с краевой особенностью приводит решение ряда задач электродинамики. Например, таких:

1. Пусть отыскивается полное дифрагированное поле $\vec{H}(\vec{x})$ от первичной волны $\vec{H}_0(\vec{x})$, падающей на плоский идеально проводящий бесконечно тонкий экран S , ограниченный контуром L . В таком случае из формулы Грина [26] следует интегральное представление вектора магнитной напряженности поля в любой точке \vec{x}_0 , не расположенной на экране:

$$\vec{H}(\vec{x}_0) = \vec{H}_0(\vec{x}_0) + \iint_S (\vec{\nabla} g \times \vec{J}(\vec{x})) dS. \quad (1.82)$$

Здесь $\vec{J}(\vec{x})$ – плотность поверхностного тока, $g = g(\vec{x}_0, \vec{x}) = \exp(jkr)/(4\pi r)$, $r = |\vec{x}_0 - \vec{x}|$, а рассеянное поле имеет вид

$$\vec{H}(\vec{x}_0) - \vec{H}_0(\vec{x}_0) = \iint_S \exp(jk\Phi) \vec{F}(\vec{x}_0, \vec{x}) dS, \quad (1.83)$$

при фазовой функции $\Phi = \Phi(\vec{x}_0, \vec{x}) = r$.

2. К интегралам вида (1.83) с той же фазовой функцией приводит излучение апертурной антенны в математически строгой модели [15, 16].

В каждом из приведенных примеров действует физически необходимое условие на ребре, обеспечивающее конечность энергии в окрестности излома поверхности [26]. Вследствие этого у амплитудной функции F допустима на бесконечно тонком краю сингулярность, т.е. $F = F_0/\sqrt{d}$, где F_0 непрерывна в окрестности

¹ Не ограничивая общности, везде далее будем под F понимать какую-либо компоненту вектора \vec{F} . Под k будем понимать безразмерный параметр, равный произведению волнового числа k_0 на характерный размер экрана.

краевого контура, а $d=d(x_1, x_2)$ – расстояние точки области S от краевого контура.

В более общем случае изломов с внутренними углами $\theta \in [0, \pi]$ – $F=F_0/d^p$, $p=(\pi-\theta)/2\pi \in [0, 1/2]$.

Метод получения коротковолновых асимптотик при наличии краевых сингулярностей излагается ниже применительно к интегралу P по плоской строго выпуклой области S с достаточно гладкими краевым контуром L и функцией F_0 :

$$P = \iint_S \exp(jkr) \frac{F_0(\vec{x})}{\sqrt{d(\vec{x})}} dS, \quad (1.84)$$

где $r = \sqrt{(x_1^0 - x_1)^2 + (x_2^0 - x_2)^2 + h^2}$, ($h = x_3^0 \neq 0$).

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, 0) \in S$ находится от краевого контура L на расстоянии $R_1 > 0$. Тогда комплексная диаграмма направленности

$$Q = \iint_S \exp(-jk(\vec{R}^0 \cdot \vec{x})) \frac{F_0(\vec{x})}{\sqrt{d(\vec{x})}} dS, \quad (1.85)$$

где $\vec{R}^0 = (0, -\cos\psi, \sin\psi)$.

Исследовать интеграл P удобно, задав краевой контур L уравнением в полярных координатах (ρ, θ) с полюсом в точке M_0 :

$$\rho = \omega(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1.86)$$

В этом случае (можно обосновать) амплитудная функция в интеграле P представима отношением вида $F_1(\rho, \theta)/\sqrt{\omega(\theta) - \rho}$ с числителем, не имеющим особенностей. Получим

$$P = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\omega(\theta)} \exp(jk\sqrt{\rho^2 + h^2}) \frac{F_1(\rho, \theta) \rho d\rho}{\sqrt{\omega(\theta) - \rho}}. \quad (1.87)$$

Преобразуем интеграл P к новой переменной интегрирования $r = \sqrt{\rho^2 + h^2}$:

$$P = \int_0^{2\pi} d\theta \int_h^{\Omega} \exp(jkr) (\Omega - r)^{-1/2} G r dr, \quad (1.88)$$

где $\Omega = \Omega(\theta) = \sqrt{\omega^2(\theta) + h^2}$,

$$G = G(r, \theta) = F_1 \left(\sqrt{r^2 - h^2}, \theta \right) \left[\frac{\omega(\theta) + \sqrt{r^2 - h^2}}{\Omega(\theta) + r} \right]^{1/2}.$$

Введем при $h \leq r \leq \Omega(\theta)$ бесконечно дифференцируемые по r (при каждом θ) нейтрализаторы $\gamma_0(r, \theta)$, $\gamma_1(r, \theta)$, такие, что $\gamma_1 = 1 - \gamma_0$, $\gamma_0(r, \theta) = \begin{cases} 1, & h \leq r \leq \varepsilon_1 \\ 0, & \varepsilon_0 \leq r \leq \Omega(\theta) \end{cases}$ ($h < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \Omega(\theta)$). При условии $1 = \gamma_0(r, \theta) + \gamma_1(r, \theta)$ получим $P = P_0 + P_1$.

Рассмотрим асимптотику интеграла P . Вклад точки стационарной фазы $\rho = 0$ ($r = h$) таков:

$$P_0 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_h^{\varepsilon_0} \exp(jkr) (\Omega - r)^{-1/2} G \gamma_0 r dr. \quad (1.89)$$

Так как функция $G_0(r, \theta) = (\Omega - r)^{-1/2} G \gamma_0 r$ при каждом θ непрерывна по $r \in [h, \varepsilon_0]$ вместе со своими производными (они равны нулю при $r = \varepsilon_0$), то интегрирование по частям приводит к соотношению

$$P_0 = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m \exp(jkh)}{(jk)^m} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{m-1} G_0(h, \theta)}{\partial r^{m-1}} d\theta + O\left(\frac{1}{k^{N+1}}\right). \quad (1.90)$$

В главном приближении

$$P_0 = -\frac{h \exp(jkh)}{jk} F_1(M_0) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\omega(\theta)}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (1.91)$$

При асимптотическом разложении интеграла

$$P_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varepsilon_1}^{\Omega} \exp(jkr) (\Omega - r)^{-1/2} G\gamma_1 r dr \quad (1.92)$$

к цели приводит интегрирование по частям во внутреннем интеграле. Однако, вследствие сингулярности функции $(\Omega - r)^{-1/2}$ в точке $r = \Omega$, дифференцировать ее под знаком интеграла недопустимо и, вместо e^{jkr}/jk , $e^{jkr}/(jk)^2$, ... нужно применить последовательность первообразных специального вида от произведения $e^{jkr}(\Omega - r)^{-1/2} = U_0(r, \theta)$, т.е. применить последовательность функций

$$U_m(r, \theta) = \frac{(-1)^{m+j\infty}}{(m-1)!} \int_r^{\Omega} (t-r)^{m-1} \exp(jkt) (\Omega - t)^{-1/2} dt, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (1.93)$$

обладающих следующими свойствами:

1. $\frac{\partial U_m(r, \theta)}{\partial r} = U_{m-1}(r, \theta), \quad (m = 1, 2, \dots),$
2. $U_m(\Omega, \Omega) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \exp(\pi j(m+1/2)/2) \frac{\Gamma(m-1/2)}{k^{m-1/2}} \exp(jk\Omega),$
3. $|U_m(r, \Omega)| \leq \frac{1}{(m-1)!} \frac{\Gamma(m-1/2)}{k^{m-1/2}}, \quad (h \leq r \leq \Omega).$

Из этих свойств вытекает асимптотическое разложение

$$P_1 = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^{m-1} \exp(-j\pi(m-1/2)/2) \Gamma(m-1/2)}{k^{m-1/2}} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \exp(jk\Omega) \Psi_{m-1}(\theta) d\theta + O\left(\frac{1}{k^{N+1/2}}\right), \quad (1.94)$$

где $\Psi_{m-1}(\theta) = \frac{\partial^{m-1}[G(r,\theta)r]}{\partial r^{m-1}} \Big|_{r=\Omega(\theta)}$.

В главном приближении

$$P_1 = \frac{\exp(-j\pi/4) \sqrt{\pi}^{2\pi}}{\sqrt{k}} \int_0^{2\pi} \exp(jk\Omega) F_1(\omega, \theta) \sqrt{\omega\Omega} d\theta + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Теперь рассмотрим асимптотическое представление интеграла Q (1.85). Ограничимся случаем краевого контура L , симметричного относительно одной из осей координат, и получим лишь первые два члена асимптотического разложения.

Пусть в системе координат (x, y) L задается уравнениями $x = \pm w(y)$ ($a \leq y \leq b$) и вблизи точек a, b $w(y)$ имеет асимптотики

$$w(y) \sim \begin{cases} p(y)\sqrt{y-a}, & (y \rightarrow a+0) \\ q(y)\sqrt{b-y}, & (y \rightarrow b-0) \end{cases}.$$

При этом $p(y), q(y), w^2(y)$ – достаточно гладкие функции соответственно в $[a, a+\varepsilon), (b-\varepsilon, b], [a, b]$ (при $\varepsilon < (b-a)/2$).

Амплитудную функцию в (1.85) можно представить как отношение вида $f(x, y) / \sqrt{w^2(y) - x^2}$, в котором $f(x, y)$ не имеет сингулярностей. Предположим, что эта функция достаточно гладкая в $S \cup L$. После несложных преобразований получим

$$Q = \int_a^b \exp(j\bar{k}y) U(y) dy, \quad (\bar{k} = k \cos \psi), \quad (1.95)$$

$$U(y) = \int_{-1}^1 f(\xi w(y), y) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (1.96)$$

$$U'(y) = \int_{-1}^1 \frac{\partial f(\xi w(y), y)}{\partial y} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{1}{2} \frac{dw^2(y)}{dy} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f(\theta \xi w(y), y)}{\partial x^2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (0 < \theta < 1). \quad (1.97)$$

Из (1.96), (1.97) следует, что

$$U(a) = f(0, a)\pi, \quad U(b) = f(0, b)\pi,$$

$$U'(a) = \left(\frac{\partial f(0, a)}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(0, a)}{\partial x^2} A \right) \pi, \quad (1.98)$$

$$U'(b) = \left(\frac{\partial f(0, b)}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(0, b)}{\partial x^2} B \right) \pi,$$

где $A = \lim_{y \rightarrow a+0} \left[\frac{w(y)}{\sqrt{y-a}} \right]^2$, $B = \lim_{y \rightarrow b-0} \left[\frac{w(y)}{\sqrt{b-y}} \right]^2$.

Двукратное интегрирование по частям в (1.95) приводит к следующей асимптотической формуле

$$Q = \pi \exp(j\bar{k}b) \left[\frac{1}{j\bar{k}} f(0, b) - \frac{1}{(j\bar{k})^2} \left(\frac{\partial f(0, b)}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(0, b)}{\partial x^2} B \right) \right] -$$

$$- \pi \exp(j\bar{k}a) \left[\frac{1}{i\bar{k}} f(0, a) - \frac{1}{(j\bar{k})^2} \left(\frac{\partial f(0, a)}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f(0, a)}{\partial x^2} A \right) \right] + O\left(\frac{1}{\bar{k}^3}\right). \quad (1.99)$$

Таким образом, полученное асимптотическое представление интеграла Q имеет дискретный характер и состоит из вкладов от окрестностей точек $(0, a)$, $(0, b)$ краевого контура. Такое явление хорошо известно в теории коротковолновой дифракции и связано с концепцией "блестящих точек" в радиолокации.

Методы, близкие к примененным выше для вычисления интегралов P , Q , позволяют получить асимптотические представления интегралов с другими фазовыми функциями и другими типами краевых сингулярностей.

Применим полученное обобщение формулы Конторовича (1.81) к решению задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем гладком выпуклом теле (в приближении физической оптики).

1.4.2. Импульсная характеристика идеально проводящего гладкого выпуклого тела в двухпозиционном случае (метод физической оптики). Исключение терминаторных разрывов

Воспользовавшись асимптотическим соотношением (1.99), можно получить представление импульсной характеристики идеально проводящего гладкого выпуклого тела в общем случае бистатической локации.

Пусть на объект с поверхностью S падает плоская монохроматическая электромагнитная волна

$$\begin{aligned} \vec{E}^0 &= \vec{p} \exp(j k_0 (a + \vec{R}^0 \cdot \vec{x})), \\ \vec{H}^0 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\vec{R}^0 \times \vec{p}) \exp(j k_0 (a + \vec{R}^0 \cdot \vec{x})). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Здесь a – расстояние от плоскости нулевой фазы до выбранного начала координат, \vec{p} – орт поляризации, \vec{R}^0 – волновой орт падающей волны.

Операционным оригиналом поля (1.100) является импульсная плоская волна

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}^0(t, \vec{x} | \vec{R}^0) &= \vec{p} \delta(t - a - \vec{R}^0 \cdot \vec{x}), \\ \vec{\mathcal{H}}^0(t, \vec{x} | \vec{R}^0) &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\vec{R}^0 \times \vec{p}) \delta(t - a - \vec{R}^0 \cdot \vec{x}). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Поле, рассеянное телом в направлении орта \vec{r}^0 при облучении волной (1.100), может быть представлено в виде:

$$\vec{H}^{pac}(r \vec{r}^0) \approx \frac{\exp(j k_0 r)}{4 \pi r} j k_0 \iint_S (\vec{H}^\perp \times \vec{r}^0) \exp(-j k_0 (\vec{r}^0 \cdot \vec{x})) dS,$$

где \vec{H} – полное поле на поверхности S . Приближение физической оптики дает следующее выражение для рассеянного поля:

$$\vec{H}^{pac}(r \vec{r}^0) \approx j k_0 \iint_{S_{осв}} \exp(j k_0 \Phi) \vec{A} dS, \quad (1.102)$$

где $S_{осв}$ – часть поверхности объекта, "освещенная" волной (1.100),

$$\vec{A} = \frac{1}{2 \pi r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\vec{n} \times (\vec{R}^0 \times \vec{p})) \times \vec{r}^0, \quad \Phi = a + r + (\vec{R}^0 - \vec{r}^0) \cdot \vec{x}.$$

Импульсная же характеристика объекта является оригиналом, спектральное изображение которого в высокочастотном приближении представляется выражением (1.102):

$$\vec{\mathcal{H}}^{pac}(t, \vec{x} | \vec{r}^0) \approx -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{осв}} \delta(t - \Phi(\vec{x})) \vec{A} dS. \quad (1.103)$$

Таким образом, выражение для импульсной характеристики может быть получено с помощью формулы (1.99) простым дифференцированием по t .

Попутно получим представление для оценки решения стационарной задачи дифракции, описываемого выражением (1.102).

Оценим вначале вклад точки стационарной фазы. Точка стационарной фазы M_0 определяется равенством: в точке M_0

$$\bar{D}\Phi = (\bar{R}^0 - \bar{r}^0)^T = \bar{R}^{0T} - \bar{r}^{0T} = 0$$

или

$$\bar{R}^0 \cdot \bar{n} = -\bar{r}^0 \cdot \bar{n},$$

где \bar{n} – нормаль к S_{ocb} в точке стационарной фазы M_0 .

Введем в окрестности точки M_0 локальную систему координат ξ_1, ξ_2, ζ , описанную в п. 1.4.1 (здесь $\zeta = \xi_3$). Вблизи точки M_0 на S_{ocb}

$$\zeta = -\left(\frac{a_{11}}{2}\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + \frac{a_{22}}{2}\xi_2^2\right) + o(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

то есть с точностью до членов высшего порядка малости

$$\zeta = -\frac{1}{2}\bar{\xi}' A \bar{\xi}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В этом случае вблизи M_0

$$\bar{\Phi}(\xi_1, \xi_2) = a + r + l_1^0 \xi_1 + l_2^0 \xi_2 - \frac{1}{2}(\bar{l}^0 \cdot \bar{n}_{M_0})\left(\bar{\xi}' A \bar{\xi}\right),$$

где $\bar{l}^0 = \bar{R}^0 - \bar{r}^0$,

так что

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \right)_{M_0} = -\frac{1}{2} (\vec{l}^0 \cdot \vec{n}_{M_0}) a_{ik},$$

$$\bar{\Phi}_{M_0} = -\frac{1}{2} (\vec{l}^0 \cdot \vec{n}_{M_0}) A.$$

Учитывая, что

$$(\vec{l}^0 \cdot \vec{n}_{M_0}) = 2(\vec{R}^0 \cdot \vec{n}_{M_0}) = -2(\vec{r}^0 \cdot \vec{n}_{M_0}),$$

получим

$$\bar{\Phi}_{M_0} = (\vec{r}^0 \cdot \vec{n}_{M_0}) A.$$

Так как \vec{n}_{M_0} – орт внешней нормали к S_{ocv} , то очевидно, что $(\vec{r}^0 \cdot \vec{n}_{M_0}) > 0$.

Пусть λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы A . Тогда

$$\text{sgn } \bar{\Phi}_{M_0} = \text{sgn } A,$$

$$|\det \bar{\Phi}_{M_0}| = (\vec{r}^0 \cdot \vec{n}_{M_0})^2 |\det A| = (\vec{r}^0 \cdot \vec{n}_{M_0})^2 |\lambda_1 \lambda_2|.$$

Далее, при надлежащем повороте системы координат вокруг оси ζ получаем уравнение S_{ocv} вблизи M_0

$$\zeta = -\frac{1}{2} (\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2) + \dots,$$

откуда следует, что λ_1, λ_2 – главные кривизны S_{ocv} в точке M_0 :

$$\lambda_1 = \alpha_1, \quad \lambda_2 = \alpha_2;$$

$$\left| \det \bar{\Phi}_{M_0} \right| = \cos^2 \left(\bar{r}^0, \bar{n}_{M_0} \right) \cdot \left| \alpha_1 \alpha_2 \right|.$$

Для дальнейшего необходимо предположить, что $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$. В частности, если S вблизи точки M_0 является строго выпуклой, то $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ и

$$\left| \det \bar{\Phi}_{M_0} \right| = \alpha_1 \alpha_2 \cos^2 \left(\bar{r}^0, \bar{n}_{M_0} \right),$$

$$\text{sgn } \bar{\Phi}_{M_0} = 2.$$

Если же M_0 – седловая точка, то $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, $\text{sgn } \bar{\Phi}_{M_0} = 0$. Ради определенности, дальнейшее рассмотрение проводится для случая $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Воспользовавшись формулой (1.78), получим вклад точки стационарной фазы в рассеянное поле:

$$\begin{aligned} \bar{H}^{pac} \left(r \bar{r}^0 \right) \Big|_{cm. \phi.} \sim & - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\left[\bar{n}_{M_0} \times \left(\bar{R}^0 \times \bar{p} \right) \right] \times \bar{r}^0}{r \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \left| \cos \left(\bar{r}^0, \bar{n}_{M_0} \right) \right|} \cdot \\ & \cdot \exp \left(j k \left(a + r + \bar{l}^0 \cdot \bar{x}_{M_0} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.104)$$

Границей поверхности S_{ocv} является терминатор L – линия, определяющая границу "свет-тень". Оценим ее вклад в асимптотику рассеянного поля, воспользовавшись формулой (1.75):

$$\left(\bar{H}^{pac} \left(r \bar{r}^0 \right) \right)_{Bкл. \Gamma} \sim \int_L e^{jk\Phi} \bar{A} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}}}{\left| \bar{D} \Phi \right|^2} dl. \quad (1.105)$$

Здесь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = \bar{l}^0 \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{l}^0 \cdot (\bar{\tau} \times \bar{n}),$$

$$|\bar{D}\Phi|^2 = \left| \bar{l}^{0T} \right|^2 = \left| \bar{l}^0 \right|^2 - (\bar{l}^0 \cdot \bar{n})^2.$$

Допустим, что контур L задан параметрически:

$$\bar{x} = \bar{x}(t).$$

Тогда контурные точки стационарной фазы определяются из уравнения

$$\bar{l}^0 \cdot \bar{x}'(t) = 0$$

и пусть это точки – M_i ($i = 1, \dots, N$). Тогда интеграл в (1.105) может быть вычислен асимптотически:

$$\begin{aligned} (\bar{H}^{pac}(r\bar{r}^0))_{\text{Вкл.}L} \sim \sum_{m=1}^N \sqrt{\frac{2}{k \left| \bar{l}^0 \cdot \left(\frac{d\bar{\tau}}{dS} \right)_{M_m} \right|}} \cdot (\bar{A})_{M_m} \frac{(\bar{l}^0 \bar{\tau} \bar{n})_{M_m}}{\left| \bar{l}^0 \right|^2 - (\bar{l}^0 \cdot \bar{n}_{M_m})^2} \cdot \\ \cdot \exp \left(jk(a+r+\bar{l}^0 \cdot \bar{x}_{M_m}) + \frac{j\pi}{4} \text{sgn} \left(\bar{l}^0 \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dS} \right)_{M_m} \right). \end{aligned} \quad (1.106)$$

Здесь учтено, что

$$(\Phi''(l))_{M_m} = \bar{l}^0 \cdot \left(\frac{d\bar{\tau}}{dS} \right)_{M_m},$$

где

$$\bar{\tau}(t) = \frac{\bar{x}'(t)}{|\bar{x}'(t)|}, \quad \frac{d\bar{\tau}}{dS} = \bar{\tau}'(t) \frac{dt}{dS} = \frac{\bar{\tau}'(t)}{|\bar{x}'(t)|}.$$

Таким образом, объединив формулы (1.104) и (1.105), получим

$$\begin{aligned} \bar{H}^{pac}(r\bar{r}^0) \sim & - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{[\bar{n}_{M_0} \times (\bar{R}^0 \times \bar{p})] \times \bar{r}^0}{r \cdot \sqrt{|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2|} (\bar{r}^0 \cdot \bar{n}_{M_0})} \times \\ & \times \exp(jk(a + r + \bar{l}^0 \cdot \bar{x}_{M_0})) + \int_L e^{jk\Phi} \bar{A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} / |\bar{D}\Phi|^2 \right) dl. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Формула (1.107) дает решение стационарной задачи дифракции при облучении идеально проводящего гладкого выпуклого тела плоской волной (1.100).

Выражение же импульсной характеристики рассматриваемого объекта (рассеянного поля, получаемого в результате нестационарного импульсного облучения объекта полем (1.101)) может рассматриваться как оригинал, спектральное изображение которого дается формулой (1.107):

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}^{pac}(t, \bar{x} | \bar{r}^0) \sim & - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{[\bar{n}_{M_0} \times (\bar{R}^0 \times \bar{p})] \times \bar{r}^0}{r \cdot \sqrt{|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2|} (\bar{r}^0 \cdot \bar{n}_{M_0})} \delta(t - a - r - \bar{l}^0 \cdot \bar{x}_{M_0}) + \\ & + \int_L \delta(t - a - r - \bar{l}^0 \cdot \bar{x}) \bar{A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} / |\bar{D}\Phi|^2 \right) dl. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Таким образом, в полученном физоптическом приближении импульсной характеристики нами выделены члены, ответственные за появление "терминаторных" разрывов, вызванных неадекватным описанием плотности поверхностного тока вблизи границы "свет-тень" в приближении физической оптики. Полученное решение стационарной задачи дифракции, по аналогии с [6], можно улучшить вычитая из полученного физоптического решения главные члены "терминаторной" асимптотики, описываемые соотношением (1.106).

Сглаживание импульсной характеристики (1.108) может быть проведено путем вычитания из правой части (1.108) опера-

ционного оригинала, соответствующего изображению $(\vec{H}^{pac}(r \vec{r}^0))_{B_{кл.L}}$:

$$\begin{aligned} \vec{H}^{pac}(t, \vec{x} | \vec{r}^0)_{B_{кл.L}} &\sim \sum_{m=1}^N \sqrt{\frac{2}{\left| \vec{l}^0 \cdot \left(\frac{d\vec{\tau}}{dS} \right)_{M_m} \right|}} \times \\ &\times (\vec{A})_{M_m} \frac{(\vec{l}^0 \vec{\tau} \vec{n})_{M_m}}{\left| \vec{l}^0 \right|^2 - (\vec{l}^0 \cdot \vec{n}_{M_m})^2} \cdot \exp \left(j \frac{\pi}{4} \left(\operatorname{sgn} \left(\vec{l}^0 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dS} \right)_{M_m} - 1 \right) \right) \times \\ &\times \frac{\chi(t - a - r - \vec{l}^0 \cdot \vec{x}_{M_m})}{\sqrt{t - a - r - \vec{l}^0 \cdot \vec{x}_{M_m}}}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Полученное при этом представление импульсной характеристики уже не будет содержать "паразитных", реально не существующих всплесков, приносимых разрывным характером плотности поверхностного тока в приближении физической оптики.

Отметим также особый случай, когда терминатор L принадлежит плоскости с нормальным вектором \vec{l}^0 . В этом случае

$$\Phi(\vec{x})|_L = const$$

и, следовательно,

$$\vec{l}^0 \cdot \vec{x} = c \text{ на } L,$$

где c – некоторая константа.

Отсюда следует, что

$$(\vec{H}^{pac}(r \vec{r}^0))_{B_{кл.L}} \sim \exp(jk(a+r+c)) \int_L \vec{A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} / |\vec{D}\Phi|^2 \right) dl,$$

$$\left(\vec{\mathcal{H}}^{pac}\left(t, \vec{x} \mid \vec{r}^0\right)\right)_{\text{вкл.}L} \sim \delta(t-a-r-c) \int_L \vec{A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} / |\vec{D}\Phi|^2 \right) dS.$$

В этом случае, как легко видеть, образуется сильный "паразитный" терминаторный всплеск импульсной характеристики, который необходимо исключить.

В ряде случаев для оценки импульсных характеристик сложных рассеивателей в двухпозиционной локации более предпочтительным может оказаться другой подход (разработанный авторами) также использующий приближение физической оптики, но минующий оценку вкладов точек стационарной фазы [27–29].

Таким образом, в разделе дана методика получения импульсной характеристики идеально проводящего гладкого объекта в двухпозиционном случае.

При этом в полученном асимптотическом представлении выделены члены, ответственные за возникновение "паразитных" всплесков, которые выражаются контурным интегралом. Получены главные члены асимптотики этих интегралов, которые необходимо исключить из представления импульсной характеристики для сглаживания последней. Это позволит повысить точность расчетов на интервале времени до момента прихода "ползущей" волны, огибающей область тени.

Эти результаты опираются на полученное обобщение формулы М.И. Конторовича, дающей вклад граничного контура в двумерном методе стационарной фазы, на случай неплоской области и невырожденных точек стационарной фазы любого типа.

1.5. О принципе взаимности для рассеянных полей в приближении физической оптики

Как известно, для полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, и, вообще говоря, каким-либо граничным условиям на поверхности рассеивающих объектов, справедлив принцип взаим-