2.4.2.2. Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения для системы незамкнутых экранов с диэлектрическим обтекателем

Будем рассматривать модель двумерной антенной системы, состоящую из двух незамкнутых параболических идеально проводящих и бесконечно тонких экранов S_{01} и S_{02} под монолитным оживальным диэлектрическим обтекателем D_2. В основании обтекателя D_2 для моделирования аппаратуры, расположенной в основании антенной системы в реальных бортовых антенных системах, расположим дополнительный конечный идеально проводящий экран S_{03}, имеющий размер, соответствующий размеру основания обтекателя (см. рис. 2.77). Пусть стенки обтекателя выполнены из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью ε_1.

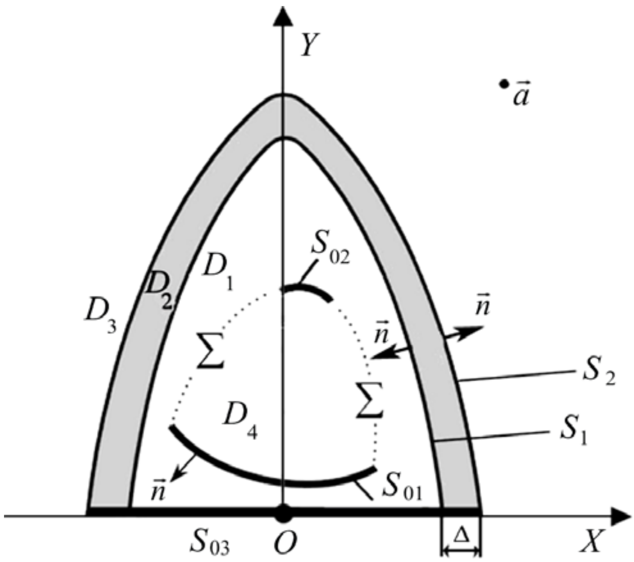

Рис. 2.77. Двумерная модель двухзеркальной антенной системы, укрытой диэлектрическим обтекателем

Выведем систему интегральных уравнений для случая E-поляризации. Будем полагать, что временная зависимость поля имеет вид $exp(-j\omega t)$. Введем в рассмотрение вспомогательный источник – токовую нить, расположенную в точке $\vec{\xi}$ ($\vec{\xi} \in D_1$) (рис. 2.77), z-ю компоненту поля которой можно записать в виде

$$G(\vec{X}, \vec{\xi}) = H_0^{(1)}(k_0 |\vec{X} - \vec{\xi}|) / 4j ,$$

где $H_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля, k_0 – волновое число в свободном пространстве, $\vec{X}$ – точка наблюдения.

Рассмотрим случай облучения системы извне E-поляризованной плоской волной. В этом случае первичное поле будет иметь вид $E_z^0(\vec{X}) = exp(jk_0(\vec{R}_0 \cdot \vec{X}))$, где $\vec{R}_0 = (R_0^1, R_0^2)$ – орт направления распространения падающей волны.

Обозначим через $E_z(\vec{\xi})$ полное поле в точке $\vec{\xi}$. Для случая E-поляризации полное поле должно удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} &E_z(\vec{\xi})\Big|_{S_0} = 0, \\ &\left.\begin{aligned} &E_z^{+}(\vec{\xi}) = E_z^{-}(\vec{\xi}), \\ &1/\mu_0 \times \partial E_z^{+}(\vec{\xi}) / \partial n_\xi = 1/\mu_1 \times \partial E_z^{-}(\vec{\xi}) / \partial n_\xi \end{aligned}\right\} \text{ для } \vec{\xi} \in S, \end{aligned} \qquad (2.163)$$

где $S_0 = S_{01} \cup S_{02} \cup S_{03}$, $S = S_1 \cup S_2$, $E_z^{+}(\vec{\xi})$, $\partial E_z^{+}(\vec{\xi}) / \partial n_\xi$, $E_z^{-}(\vec{\xi})$, $\partial E_z^{-}(\vec{\xi}) / \partial n_\xi$ – граничные значения на S_0 полного поля и его нормальной производной со стороны выбранного направления нормали $\vec{n}$ и с противоположной стороны, μ_0 – относительная магнитная проницаемость свободного пространства, μ_1 – относительная магнитная проницаемость материала, из которого выполнен обтекатель.

Здесь и далее для рассматриваемых диэлектрических материалов $\mu_1 = \mu_0 = 1$.

Предположим, что точка наблюдения расположена в области D_1 $\left(\vec{X} \in D_1\right)$.

Применив вторую формулу Грина [70] к функциям $E_z\left(\vec{\xi}\right)$ и $G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)$ в области D_4, с учетом выбранных направлений нормалей, получим следующее выражение:

$$\iint\limits_{D_4}\left[E_z\left(\vec{\xi}\right)\nabla^2 G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right) - G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)\nabla^2 E_z\left(\vec{\xi}\right)\right] dS_\xi =$$

$$= \int\limits_{S_{01}+S_{02}}\left(E_z^-\left(\vec{\xi}\right)\frac{\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi} - G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)\frac{\partial E_z^-\left(\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma}\left(E_z^-\left(\vec{\xi}\right)\frac{\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi} - G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)\frac{\partial E_z^-\left(\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi\,, \qquad (2.164)$$

где dS_ξ – дифференциал площади, dl_ξ – дифференциал дуги.

Функции $G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)$ и $E_z\left(\vec{\xi}\right)$ в области D_4, должны отвечать следующим уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2 E_z\left(\vec{\xi}\right) + k_0{}^2 E_z\left(\vec{\xi}\right) = 0\,,$$

$$\nabla^2 G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right) + k_0{}^2 G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right) = 0\,. \qquad (2.165)$$

С учетом уравнений (2.165) и граничных условий (2.163) перепишем выражение (2.164) в следующем виде

$$0 = -\int\limits_{S_{01}+S_{02}}\left(G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)\frac{\partial E_z^-\left(\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma}\left(E_z^-\left(\vec{\xi}\right)\frac{\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi} - G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)\frac{\partial E_z^-\left(\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi\,. \qquad (2.166)$$

Теперь применим вторую формулу Грина к функциям $E_z(\vec{\xi})$ и $G(\vec{X},\vec{\xi})$ в области D_1, с учетом выбранных направлений нормалей получаем следующее выражение:

$$\iint\limits_{D_1}\left[E_z(\vec{\xi})\nabla^2 G(\vec{X},\vec{\xi})-G(\vec{X},\vec{\xi})\nabla^2 E_z(\vec{\xi})\right]dS_\xi =$$
$$=-\int\limits_{S_{01}+S_{02}}\left(E_z^+(\vec{\xi})\frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_\xi}-G(\vec{X},\vec{\xi})\frac{\partial E_z^+(\vec{\xi})}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi -$$
$$-\int\limits_{\Sigma}\left(E_z^+(\vec{\xi})\frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_\xi}-G(\vec{X},\vec{\xi})\frac{\partial E_z^+(\vec{\xi})}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi +$$
$$+\int\limits_{S_{03}}\left(E_z^-(\vec{\xi})\frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_\xi}-G(\vec{X},\vec{\xi})\frac{\partial E_z^-(\vec{\xi})}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi . \tag{2.167}$$

В области D_1 функции $G(\vec{X},\vec{\xi})$ и $E_z(\vec{\xi})$ должны отвечать следующим уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 E_z(\vec{\xi})+k_0{}^2 E_z(\vec{\xi})=0,$$
$$\nabla^2 G(\vec{X},\vec{\xi})+k_0{}^2 G(\vec{X},\vec{\xi})=\delta(\vec{X}-\vec{\xi}), \tag{2.168}$$

где $\delta(\bullet)$ – дельта-функция Дирака.

В результате для области D_1 можем записать

$$E_z(\vec{X})=\int\limits_{S_{01}+S_{02}}G(\vec{X},\vec{\xi})\frac{\partial E_z^+(\vec{\xi})}{\partial n_\xi}dl_\xi -$$
$$-\int\limits_{\Sigma}\left(E_z^+(\vec{\xi})\frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_\xi}-G(\vec{X},\vec{\xi})\frac{\partial E_z^+(\vec{\xi})}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi -$$
$$-\int\limits_{S_{03}}G(\vec{X},\vec{\xi})\frac{\partial E_z^-(\vec{\xi})}{\partial n_\xi}dl_\xi -\int\limits_{S_1}\left(E_z^+(\vec{\xi})\frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_\xi}-G(\vec{X},\vec{\xi})\frac{\partial E_z^+(\vec{\xi})}{\partial n_\xi}\right)dl_\xi .$$
$$\tag{2.169}$$

Учтем, что в области D_2 функции $E_z(\vec{\xi})$ и $G(\vec{X},\vec{\xi})$ должны удовлетворять следующим уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 E_z(\vec{\xi}) + k_1{}^2 E_z(\vec{\xi}) = 0\,,$$
$$\nabla^2 G(\vec{X},\vec{\xi}) + k_0{}^2 G(\vec{X},\vec{\xi}) = 0\,, \qquad (2.170)$$

где k_1 – волновое число в среде с параметрами материала обтекателя.

Применив вторую формулу Грина к функциям $E_z(\vec{\xi})$ и $G(\vec{X},\vec{\xi})$ в области D_2, получаем

$$\iint_{D_2} \left(k_1{}^2 - k_0^2\right) E_z(\vec{\xi}) G(\vec{X},\vec{\xi}) dS_\xi =$$
$$= \int_{S_1+S_2} \left(E_z^-(\vec{\xi}) \frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_\xi} - G(\vec{X},\vec{\xi}) \frac{\partial E_z^-(\vec{\xi})}{\partial n_\xi} \right) dl_\xi\,. \qquad (2.171)$$

В области D_3 функции $E_z(\vec{\xi})$ и $G(\vec{X},\vec{\xi})$ должны удовлетворять следующим уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 E_z(\vec{\xi}) + k_0{}^2 E_z(\vec{\xi}) = \delta(\vec{\xi} - \vec{a}),$$
$$\nabla^2 G(\vec{X},\vec{\xi}) + k_0{}^2 G(\vec{X},\vec{\xi}) = 0. \qquad (2.172)$$

Применив вторую формулу Грина к функциям $E_z(\vec{\xi})$ и $G(\vec{X},\vec{\xi})$ в области D_3, получаем

$$-G(\vec{X},\vec{a}) = -\int_{S_2} \left(E_z^+(\vec{\xi}) \frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_\xi} - G(\vec{X},\vec{\xi}) \frac{\partial E_z^+(\vec{\xi})}{\partial n_\xi} \right) dl_\xi +$$
$$+ \int_{S_{03}} G(\vec{X},\vec{\xi}) \frac{\partial E_z^+(\vec{\xi})}{\partial n_\xi} dl_\xi. \qquad (2.173)$$

Далее, просуммировав выражения (2.166), (2.169), (2.171), (2.173) и введя в рассмотрение величину $q(\vec{\xi}) = \frac{\partial E_z^{+}(\vec{\xi})}{\partial n_{\xi}} - \frac{\partial E_z^{-}(\vec{\xi})}{\partial n_{\xi}}$,[1] пропорциональную плотности поверхностного тока, получаем интегральное представление для полного поля [71]

$$E_z(\vec{X}) - G(\vec{X},\vec{a}) = -\int\limits_{S_0} G(\vec{X},\vec{\xi})q(\vec{\xi})dl_{\xi} - \left(k_1^2 - k_0^2\right)\iint\limits_{D_2} E_z(\vec{\xi})G(\vec{X},\vec{\xi})dS_{\xi}\ . \tag{2.174}$$

Устремим точку расположения токовой нити $\vec{a}$ на бесконечность в направлении $-\vec{R}_0$. В результате этого предельного перехода функция $G(\vec{X},\vec{a})$ перейдет в поле плоской волны $E_z^0(\vec{X}) = A \cdot exp\left(jk_0\left(\vec{R}_0 \cdot \vec{X}\right)\right)$, где A – амплитудный коэффициент.

Затем, расположив точку наблюдения в области D_2 и на поверхности S_0, можем получить систему интегральных уравнений для полного поля в присутствии системы "три экрана – обтекатель" в случае E-поляризации:

$$\begin{gathered} E_z(\vec{X}) - E_z^0(\vec{X}) = -\int\limits_{S_0} G(\vec{X},\vec{\xi})\,q(\vec{\xi})dl_{\xi} - \\ -\left(k_1^2 - k_0^2\right)\iint\limits_{D_2} E_z(\vec{\xi})G(\vec{X},\vec{\xi})dS_{\xi}\ ,\ \vec{X} \in D_2\ , \end{gathered} \tag{2.175}$$

$$\int\limits_{S_0} G(\vec{X},\vec{\xi})q(\vec{\xi})dl_{\xi} = E_z^0(\vec{X}) - \left(k_1^2 - k_0^2\right)\iint\limits_{D_2} E_z(\vec{\xi})G(\vec{X},\vec{\xi})dS_{\xi}\ ,\ \vec{X} \in S_0 \tag{2.176}$$

[1] В силу условий Майкснера [72] функция $q(\vec{\xi})$ имеет краевые особенности порядка $\zeta^{-\frac{1}{2}}$, ζ – расстояние от соответствующего края экрана. Данное условие было учтено при разработке метода расчета.

В случае H-поляризации полное поле $H_z(\vec{\xi})$ должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left.\partial H_z(\vec{\xi})/\partial n_\xi\right|_{S_0} = 0,$$
$$\left.\begin{aligned} &H_z^+(\vec{\xi}) = H_z^-(\vec{\xi}), \\ &1/\varepsilon_0 \times \partial H_z^+(\vec{\xi})/\partial n_\xi = 1/\varepsilon_1 \times \partial H_z^-(\vec{\xi})/\partial n_\xi, \end{aligned}\right\} \text{для } \vec{\xi} \in S. \quad (2.177)$$

По аналогии со случаем E-поляризации, применив последовательно вторую формулу Грина к областям D_1, D_2, D_3, D_4 и проделав ряд преобразований, можно получить следующее интегральное представление для $H_z(\vec{X})$ [73–75]:

$$H_z(\vec{X}) - H_z^0(\vec{X}) = -\int_{S_0} \partial G(\vec{X},\vec{\xi})/\partial n_\xi \, p(\vec{\xi}) dl_\xi -$$
$$-\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\int_S G(\vec{X},\vec{\xi}) \partial H_z^-(\vec{\xi})/\partial n_\xi \, dl_\xi - \left(k_1^2 - k_0^2\right)\iint_{D_2} H_z(\vec{\xi}) G(\vec{X},\vec{\xi}) dS_\xi, \quad (2.178)$$

где $H_z^0(\vec{X})$ – z-я компонента магнитного поля первичного источника, $\partial H_z^-(\vec{\xi})/\partial n_\xi$ – граничное значение нормальной производной полного поля со стороны области D_2. Величина $p(\vec{\xi}) = H_z^+(\vec{\xi}) - H_z^-(\vec{\xi})$[1] при рассматриваемой поляризации пропорциональна плотности поверхностного тока.

Продифференцировав равенство (2.178) по n_x, получим следующее выражение:

[1] В силу условий Майкснера [72] функция $p(\vec{\xi})$ обращается в нуль на краях экранов как $\zeta^{\frac{1}{2}}$, где ζ – расстояние от края экрана.

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{S_0}\frac{\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi}p\left(\vec{\xi}\right)dl_\xi=\frac{\partial H_z^0\left(\vec{X}\right)}{\partial n_x}-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\int\limits_S\frac{\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)}{\partial n_x}\frac{\partial H_z^-\left(\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi}dl_\xi-$$

$$-\left(k_1^2-k_0^2\right)\iint\limits_{D_2}H_z\left(\vec{\xi}\right)\frac{\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)}{\partial n_x}dS_\xi\,. \qquad (2.179)$$

Уравнение (2.179) неудобно для проведения численных расчетов, так как выражение в левой его части представляет собой нормальную производную потенциала двойного слоя. Преобразовав левую часть уравнения (2.179) аналогично тому, как это сделано в [76], получим уравнение, содержащее не только $p\left(\vec{\xi}\right)$, но и его производную вдоль дуги контура экрана $p'\left(\vec{\xi}\right)$:

$$k_0^2\int\limits_{S_0}\left(\vec{n}_\xi\cdot\vec{n}_x\right)G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)p\left(\vec{\xi}\right)dl_\xi+$$

$$+k_0\int\limits_{S_0}\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)\Big/\partial n_\xi\left[\left(\vec{R}^0\cdot\vec{\tau}_\xi\right)p'\left(\vec{X}\right)-\left(\vec{R}^0\cdot\vec{\tau}_x\right)p'\left(\vec{\xi}\right)\right]dl_\xi+$$

$$+p'\left(\vec{X}\right)\left[G\left(k_0R_A\right)-G\left(k_0R_B\right)\right]=\frac{\partial H_z^0\left(\vec{X}\right)}{\partial n_x}-$$

$$-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\int\limits_S\frac{\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)}{\partial n_x}\frac{\partial H_z^-\left(\vec{\xi}\right)}{\partial n_\xi}dl_\xi-\left(k_1^2-k_0^2\right)\iint\limits_{D_2}H_z\left(\vec{\xi}\right)\frac{\partial G\left(\vec{X},\vec{\xi}\right)}{\partial n_x}dS_\xi\,, \qquad (2.180)$$

где $p'\left(\vec{\xi}\right)\left(p'\left(\vec{X}\right)\right)$ – производная функции $p\left(\vec{\xi}\right)\left(p\left(\vec{X}\right)\right)$ по дуге контура в точке экрана $\vec{\xi}\left(\vec{X}\right)$; R_A, R_B – расстояния от краев экранов S_0 до точки наблюдения; $\vec{\tau}_\xi$, $\vec{\tau}_x$ – орты касательных к линии S_0 в точках $\vec{\xi}$, $\vec{x}$; $\vec{R}^0=\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right)\Big/\left|\vec{\xi}-\vec{x}\right|$.

Проделав ряд преобразований, можем получить систему интегральных уравнений для полного поля в случае системы "три экрана – обтекатель":

$$H_z(\vec{X}) - H_z^0(\vec{X}) = -\int\limits_{S_0} \partial G(\vec{X},\xi)/\partial n_\xi \, p(\xi) dl_\xi -$$

$$-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\int\limits_{S} G(\vec{X},\vec{\xi})\partial H_z^-(\vec{\xi})/\partial n_\xi dl_\xi -$$

$$-\left(k_1^2 - k_0^2\right)\iint\limits_{D_2} H_z(\vec{\xi}) G(\vec{X},\vec{\xi}) dS_\xi, \quad \vec{X} \in D_2, \qquad (2.181)$$

$$k_0^2 \int\limits_{S_{0l}} (\vec{n}_\xi \cdot \vec{n}_x) G(k_0 R) p_l(\vec{\xi}) dl_\xi +$$

$$+k_0 \int\limits_{S_{0l}} G'(k_0 R)\left[\left(\vec{R}^0 \cdot \vec{\tau}_\xi\right) p_l'(\vec{X}) - \left(\vec{R}^0 \cdot \vec{\tau}_x\right) p_l'(\vec{\xi})\right] dl_\xi +$$

$$+ p_l'(\vec{X})\left[G(k_0 R_{A_l}) - G(k_0 R_{B_l})\right] +$$

$$+\sum_{m \neq l} \int\limits_{S_{0m}} \frac{\partial^2 G(k_0 R)}{\partial n_\xi \partial n_x} p_m(\vec{\xi}) dl_\xi = \frac{\partial H_z^0(\vec{X})}{\partial n_x} -$$

$$-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\int\limits_{S} \frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_x}\frac{\partial H_z^-(\vec{\xi})}{\partial n_\xi} dl_\xi -$$

$$-\left(k_1^2 - k_0^2\right)\iint\limits_{D_2} \frac{\partial G(\vec{X},\vec{\xi})}{\partial n_x} H_z(\vec{\xi}) dS_\xi, \quad \vec{X} \in S_{0l}, \quad (l = 1,2,3). \qquad (2.182)$$

Под $p_l(\vec{\xi})$ в (2.182) понимается значение функции $p(\vec{\xi})$ на контуре l-го экрана.

Выражение, стоящее в правой части (2.182), содержит предельные значения $\partial H_z^-(\vec{\xi})/\partial n_\xi$ на S. Тем не менее, наличие этого члена не вызывает дополнительных расчетных трудностей, так как подлежит нахождению поле не на линии, а в плоской области. Соответствующие предельные значения нормальной производной могут быть приближенно выражены через значения поля в области D_2 с помощью интерполяции.

Как показали проведенные исследования, в большинстве случаев решение системы уравнений (2.181) и (2.182) может быть получено с помощью итерационной процедуры (в частности, в отсутствие экрана S_{03}). Однако в случае сильного взаимодействия между экранами и обтекателем при итерациях "экраны – обтекатель" не наблюдается установление токов на экранах и поля в слое обтекателя и систему уравнений (2.181), (2.182) необходимо решать непосредственно.

2.4.2.3. Численный метод решения полученных систем интегральных уравнений (случай *E*-поляризации)

Интегрирование по области D_2 может быть представлено в виде последовательного интегрирования вдоль направляющей линии S_1 и вдоль нормали к S_1. При этом, учитывая, что толщина стенки обтекателя составляет величину порядка половины длины волны, для получения приемлемой точности вычислений в используемой квадратурной формуле достаточно иметь значения подынтегральной функции в трех точках вдоль нормали. Таким образом, интеграл по области D_2 может быть представлен в виде взвешенной суммы интегралов по трем подобным S_1 контурам, находящимся внутри D_2.

Введем параметризацию точек на контурах внутри стенки обтекателя (рис. 2.78) и на контурах S_0.

Интегрирование вдоль нормали к стенке обтекателя будем проводить численно, используя 3-х точечную формулу Гаусса [71].

Для точки наблюдения на контурах внутри стенки обтекателя $\vec{X}_l = (x_l, y_l)$, $(l = 1,2,3)$

$$x_l(\theta_0) = a\,cos(\theta_0) + h(1-\beta_l)n_x(\theta_0),$$
$$y_l(\theta_0) = \eta(\theta_0) + h(1-\beta_l)n_y(\theta_0),\ (0 \le \theta_0 \le \pi);$$

для точек интегрирования на контурах внутри стенки обтекателя $\vec{\xi}_l = (x_{\xi,l}, y_{\xi,l})$, $(l = 1,2,3)$